

Chapitre 13

Les câbles

Illustration au recto et photos ci-dessous :

Mât haubané de 11 mètres servant de soutien au tilleul classé de Doyon en Belgique, plusieurs fois centenaire.

Conception, ingénieur conseil : Pierre Lateur, 2004-2005.

Croquis : Dominique Langendries.

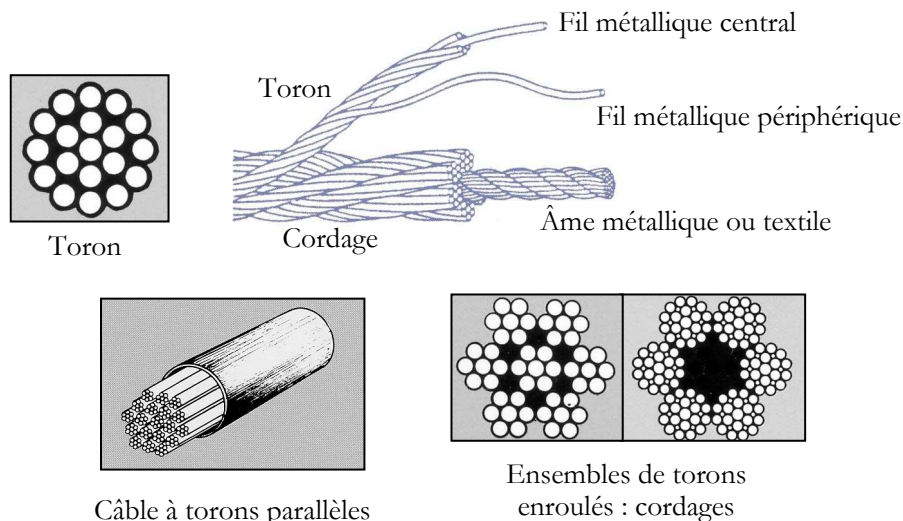


1. INTRODUCTION

Les câbles sont utilisés notamment pour les ponts suspendus ou haubanés, les pylônes haubanés, les couvertures suspendues ou les contreventements.

Les *torons* sont des assemblages de fils métalliques enroulés hélicoïdalement autour d'un fil central et constitués d'acier à très haute limite d'élasticité atteignant plusieurs fois celle de l'acier traditionnel de charpente. Ils peuvent contenir des centaines de fils et atteindre des limites de rupture de plusieurs centaines de tonnes. Leur module d'élasticité intrinsèque E_c est plus petit que celui du matériau acier à cause de l'enroulement des fils en hélice : une valeur de 170.000 [MPa] n'est pas rare.

Les *câbles* sont constitués d'un ensemble de torons alignés (on parle de câbles à torons parallèles) ou enroulés autour d'une âme centrale métallique ou textile (on parle alors de *cordages*). Les cordages possèdent un module d'élasticité intrinsèque encore plus faible, qui peut être inférieur à 140.000 [MPa].



Dans le cadre de cet ouvrage nous parlerons toujours de *câble*, indépendamment des distinctions ci-dessus.

Le calcul exact d'une structure composée de câbles est souvent laborieux pour une raison évidente : contrairement aux structures à éléments rigides, **la géométrie déformée d'un câble après chargement est très différente de sa géométrie initiale**. Cette particularité a une double conséquence : d'une part, **le principe de superposition n'est plus applicable** et, d'autre part, le calculateur ne peut plus se baser sur la géométrie de la structure non chargée pour écrire les équations d'équi-

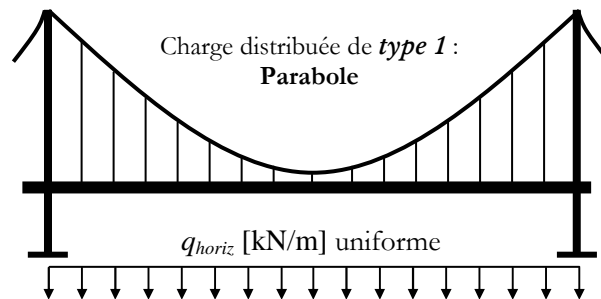
libre comme il a l'habitude de le faire pour les structures classiques (dans la mesure où l'on peut négliger les effets du second ordre, voir chapitre 1, §12).

2. GÉNÉRALITÉS SUR LA STATIQUE DES CÂBLES

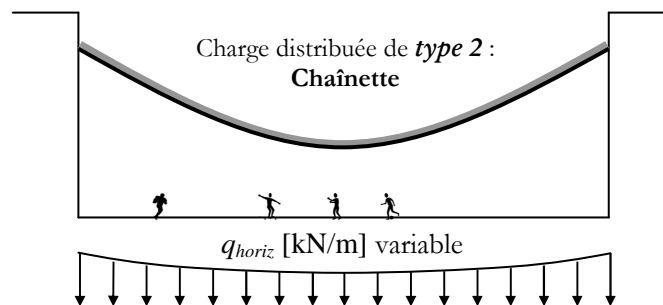
2.1. La parabole et la chaînette

L'arc funiculaire et le câble sont des structures analogues. En effet, pour une même géométrie et un même chargement, les efforts qui y règnent ne diffèrent que par leur signe : l'arc est en compression tandis que le câble est en traction. Par ailleurs, dans le chapitre relatif aux arcs funiculaires, la géométrie parabolique a été clairement distinguée de la chaînette (chap. 11, §5) :

- **la parabole** est le funiculaire d'une charge uniformément répartie par unité de longueur horizontale, par exemple un tablier suspendu (on néglige le poids propre du câble et des suspentes) :



- **la chaînette** est le funiculaire d'une charge uniformément répartie par unité de longueur prise *le long* du câble, comme son poids propre éventuellement combiné à une couverture directement accrochée au câble :



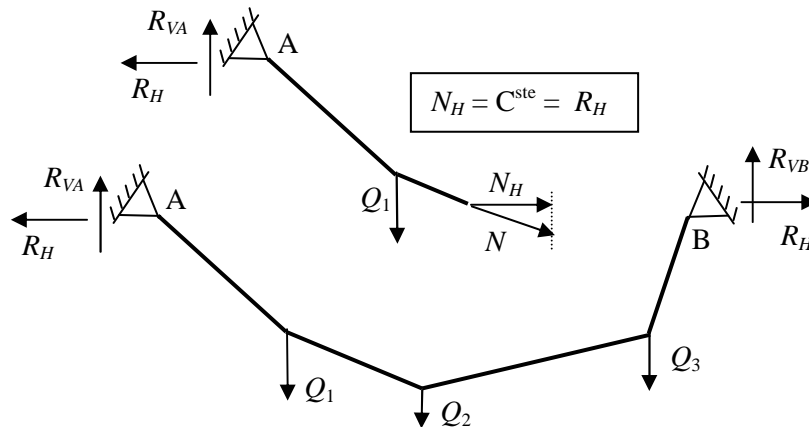
Dans la suite de ce chapitre, on parlera d'une **charge distribuée de type 1** lorsque la charge est uniformément distribuée par unité de longueur horizontale (parabole) et d'une **charge distribuée de type 2** dans l'autre cas (chaînette).

2.2. Les équations d'équilibre externe et le calcul des réactions d'appui

Nous ne considérons ici que les câbles soumis à des charges verticales. Dans ce cas les deux réactions horizontales sont forcément égales mais de sens opposés. Par ailleurs, les deux réactions d'appui verticales peuvent être différentes si les charges sont dissymétriques ou les appuis à des niveaux différents. L'équation d'équilibre horizontal servant à prouver que les deux réactions horizontales sont égales, trois équations sont encore nécessaires. En plus de l'équation d'équilibre vertical et de celle d'équilibre des moments par rapport à l'un des appuis, on peut encore profiter du fait que *le moment fléchissant est nul en tout point du câble* pour établir une seconde équation d'équilibre des moments, par exemple par rapport au point le plus bas du câble. Toutes les réactions d'appui peuvent alors être calculées.

2.3. Constance de la composante horizontale de l'effort de traction

Si les charges sont verticales, les deux réactions horizontales sont égales et de sens opposés. L'équilibre des efforts horizontaux sur tout tronçon du câble montre alors que la composante horizontale N_H de l'effort de traction qui y règne est constante et égale à la réaction d'appui horizontale R_H . Cette propriété est aussi valable pour les câbles soumis à une charge distribuée.





Structure de la toiture de la gare de Leuven, Belgique. Photo du dessus : câble de contreventement des arcs métalliques supportant la couverture de la gare, vu de la naissance des arcs en tête de pile. Photo du dessous : accrochage de ces mêmes câbles en tête de pile. (Architectes et ingénieurs Samyn and Partners avec le bureau d'études Setesco; photos de l'auteur, 2004).

2.4. Câble droit = effort infini

La réaction d'appui horizontale d'un câble dont les appuis sont au même niveau, de portée L , de flèche H et soumis à une charge répartie q , est égale à celle de l'arc (chap. 11, §3.2), soit $qL^2/(8H)$. De ce fait, si le câble est de plus en plus tendu, la flèche H du câble diminue et le dénominateur de l'expression précédente tend vers zéro. Il est donc impossible de rendre un câble complètement droit puisqu'il faudrait pour cela lui appliquer une traction infinie.

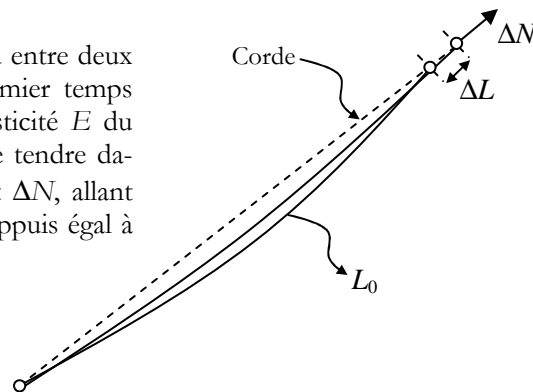
2.5. Module d'élasticité selon la corde d'un câble très tendu

Par corde, on entend la droite joignant les appuis. Comme expliqué au §1, l'enroulement en hélice est responsable du fait que le module d'élasticité intrinsèque E_c d'un câble est plus petit que le module d'élasticité E du matériau. Dans certains cas, un autre phénomène doit aussi être pris en compte dans l'évaluation du module d'élasticité.

En effet, lorsque des câbles sont utilisés comme des barres de treillis destinées uniquement à reprendre des efforts normaux, ils sont fortement tendus entre deux points. C'est le cas des câbles de ponts haubanés, de ceux des pylônes haubanés ou de certains contreventements. Dans de telles situations, ces câbles, horizontaux ou obliques, sont si tendus que l'œil pourrait faire croire qu'ils sont parfaitement droits. En réalité, leur poids propre leur donne une déformée inévitable : ils se comportent alors comme des éléments droits, mais dont le module d'élasticité est inférieur au module d'élasticité intrinsèque E_c du câble.

Il est dès lors utile de définir un module d'élasticité pris selon la corde du câble (c'est-à-dire selon la droite joignant ses appuis), noté E_{corde} , et qui est alors fonction à la fois du module d'élasticité intrinsèque E_c du câble et de la contrainte qui y règne.

Soit L_0 la longueur d'un câble tendu entre deux appuis. En supposant dans un premier temps qu'il est inextensible (module d'élasticité E du matériau infini), il est possible de le tendre davantage par un supplément d'effort ΔN , allant de pair avec un écartement de ses appuis égal à ΔL .



Le câble de section A se comporte alors comme une barre dont le module d'élasticité apparent vaut (on utilise ici la loi de Hooke, voir chap. 1, §7) :

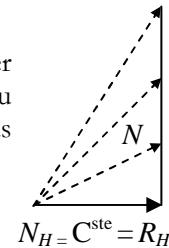
$$E_{app} = (\Delta N/A)/(\Delta L/L_0)$$

Comme le module d'élasticité intrinsèque E_c du câble n'est pas infini (il vaut, par exemple, 170.000 [MPa]), le module selon sa corde vaut finalement :

$$E_{corde} = \frac{E_c E_{app}}{E_c + E_{app}} < E_c < E$$

2.6. Tronçon soumis à l'effort de traction maximal

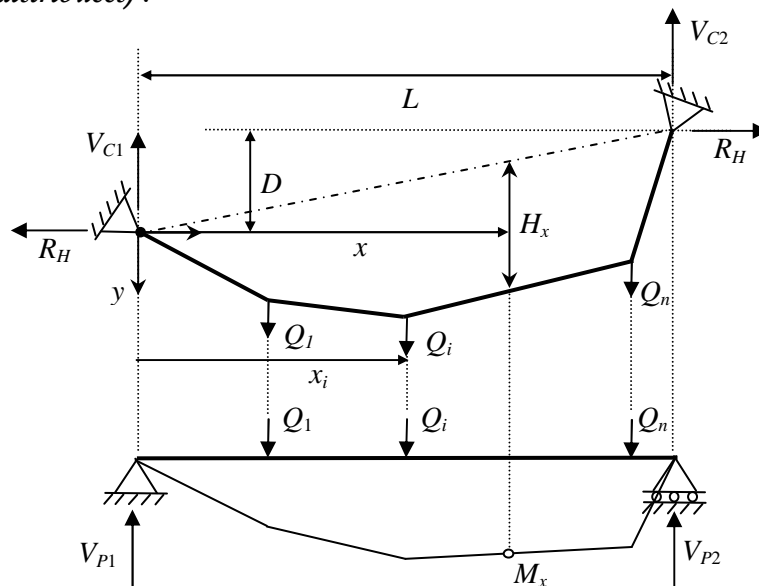
Comme la composante horizontale de l'effort de traction doit rester constante (voir §2.3), c'est le tronçon le plus incliné qui est soumis au plus grand effort de traction. C'est donc à l'un des deux appuis (et pas nécessairement au plus élevé) que cet effort sera maximum.



2.7. Théorème d'analogie avec la poutre

Ce théorème, également utile pour la recherche des formes funiculaires des arcs (voir chapitre 11, §7.5), est d'une importance capitale pour la résolution de certains problèmes liés aux câbles. Il postule que *la forme du câble est la même que celle du diagramme des moments d'une poutre de même portée soumise aux mêmes charges*. Il s'énonce comme suit :

Soit un câble soumis à un cas de charge quelconque (charges ponctuelles et/ou distribuées) :



- soit R_H la réaction d'appui horizontale;
- soit H_x la distance verticale entre un point du câble et la droite joignant ses appuis (définie par le terme *corde*);
- soit M_x le moment fléchissant, au même point, d'une poutre isostatique de même portée que le câble et supportant les mêmes charges.

Alors on a :

$$\boxed{H_x = M_x / R_H}$$

Cette propriété se démontre aisément comme suit :

1. Équilibre des couples extérieurs par rapport à l'appui droit, respectivement pour la poutre et le câble :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Poutre : } V_{P1}L = \sum_{i=1}^n Q_i(L - x_i) \\ \text{Câble : } V_{C1}L + R_H D = \sum_{i=1}^n Q_i(L - x_i) \end{array} \right. \Rightarrow V_{P1} - V_{C1} = R_H \frac{D}{L} \quad [1]$$

2. Le moment en tout point (x, y) du câble est nul. En y faisant l'équilibre de rotation du tronçon situé à gauche de ce point, on obtient :

$$V_{C1}x - R_H y - \sum_{j=1}^i Q_j(x - x_j) = 0 \quad [2]$$

3. Le moment M_x en toute abscisse x de la poutre vaut, en considérant le tronçon situé à gauche de cette abscisse x :

$$M_x = V_{P1}x - \sum_{j=1}^i Q_j(x - x_j) \quad [3]$$

En éliminant le terme de somme entre [2] et [3], on trouve :

$$M_x = (V_{P1} - V_{C1})x + R_H y$$

En éliminant de cette relation le terme $(V_{P1} - V_{C1})$ à partir de [1], on obtient :

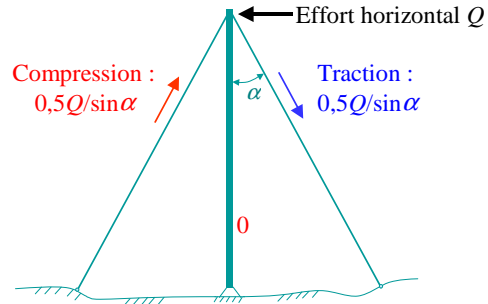
$$R_H \left(y + \frac{D}{L} x \right) = M_x \quad \text{ou encore : } \boxed{R_H H_x = M_x} \quad (\text{CQFD})$$

Remarquons que la démonstration est à peu de choses près identique si le câble est soumis à des charges réparties, combinées ou non à des charges ponctuelles.

2.8. Un câble peut-il reprendre de la compression ?

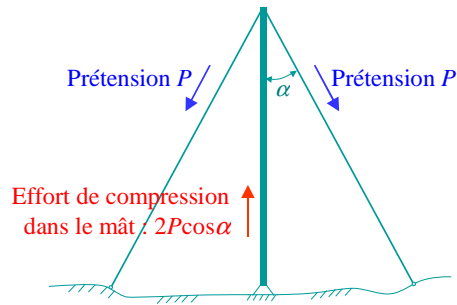
La réponse est : oui, s'il est précontraint, c'est-à-dire s'il est déjà le siège d'un effort de traction.

En effet, supposons un mât stabilisé par des barres obliques rigides. Lorsqu'on applique un effort horizontal Q en tête, la barre de droite est tendue et celle de gauche comprimée, comme l'illustre la figure ci-contre.



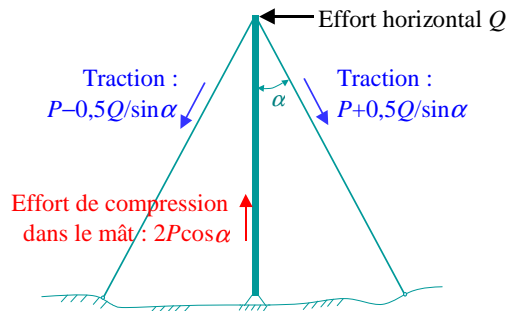
Supposons maintenant que les deux barres obliques soient des câbles. Celui de gauche ne peut reprendre l'effort de compression car il se détend complètement. Le mât subit alors un effort de compression $Q/\tan\alpha$ et le câble de droite un effort de traction plus grand, égal à $Q/\sin\alpha$. Cette situation est évidemment à proscrire car en plus, un câble ne peut jamais être détendu pour des raisons de *fatigue* des assemblages.

Si on exerce uniquement une pré-tension (précontrainte) dans les deux câbles, par exemple via un dispositif à tendeur placé à leurs appuis, on obtient les efforts suivants :



Si maintenant la charge horizontale de tête s'applique en plus de la précontrainte, et pour autant que cette dernière soit suffisamment grande, on constate que le câble de gauche n'est plus détendu mais qu'il peut cette fois reprendre un effort de compression égal à $0,5Q/\sin\alpha$, exactement comme une barre droite de même facteur EA le ferait :

Avec
 $P > 0,5Q/\sin\alpha$



2.9. Contrôle de la mise en tension dans un câble

Nombreuses sont les situations où l'on a besoin de mettre des câbles sous tension et de connaître avec exactitude la valeur de leur précontrainte. Prenons l'exemple d'un mât haubané. La précontrainte dans les haubans devra :

- être suffisante pour que ceux-ci ne soient jamais complètement détendus sous les charges variables (de vent par exemple). Dans le cas contraire on s'expose à des problèmes de fatigue des assemblages, des problèmes de déplacements excessifs de la structure et des déformations très visibles des câbles ;
- être limitée pour ne pas dépasser la contrainte maximale autorisée lorsque les charges extérieures créent des efforts internes qui se superposent aux efforts dus à la précontrainte.

Il existe sur le marché certains appareils de mesure portables capables de mesurer l'effort de tension qui règne dans un câble. Ces appareils sont toutefois coûteux et leur usage est limité aux petits diamètres. On peut aussi munir les câbles de dispositifs de mesure fixes et définitifs comme des capteurs de forces ou des jauges de contrainte fixées sur les tendeurs.

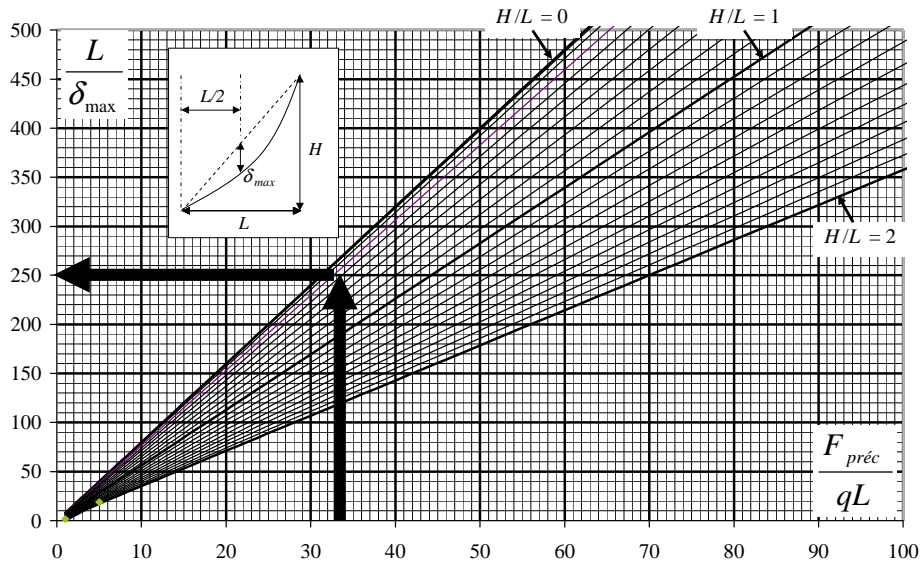
Une autre méthode utile pour connaître la précontrainte est de tendre un fil léger entre les deux appuis du câble de sorte que ce fil soit le plus confondu possible avec la corde du câble (fil le plus droit possible). On mesure ensuite à mi-portée la distance verticale δ_{\max} entre le fil et le câble, ce qui permet indirectement de retrouver l'effort de précontrainte.

Pour un câble oblique inscrit dans un rectangle de largeur L et de hauteur H , de poids propre q et soumis à une précontrainte $F_{\text{préc}}$, il est possible d'établir, pour une valeur de H/L donnée, une relation linéaire entre deux nombres sans dimensions, respectivement L/δ_{\max} et $F_{\text{préc}}/qL$. Ces nombres sont donc directement en rapport avec la flèche maximale δ_{\max} d'une part et l'effort de précontrainte $F_{\text{préc}}$ d'autre part.

Cette relation provient directement des équations d'équilibre du câble parabolique (ou de l'arc parabolique équivalent, voir les équations du chapitre 11, §3.5) :

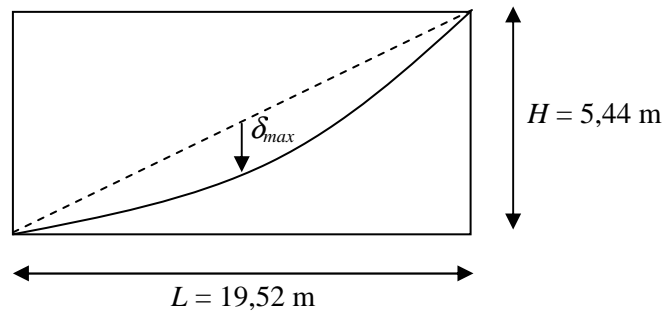
$$\frac{L}{\delta_{\max}} = \text{fonction}\left(\frac{H}{L}\right) * \frac{F_{\text{préc}}}{qL}$$

La figure suivante traduit cette relation pour les rapports H/L les plus communs, avec un pas de 0,1 pour H/L ($H/L=0$: horizontal, $H/L=1$: à 45° , $H/L=2$).



Exemple d'utilisation de la figure ci-dessus :

Les photos de la page 322 montrent les câbles de contreventement d'une couverture métallique qui doivent être mis en place avec une précontrainte de 50 kN. Ces câbles pèsent 75,83 N/m et leur géométrie en plan est la suivante :



$$\text{On a : } \frac{F_{\text{préc}}}{qL} = \frac{50000}{75,83 \cdot 10^{-3} \cdot 19520} = 33,77 \quad \text{et} \quad H/L = 5,44/19,52 = 0,279.$$

Le graphique ci-dessus fournit alors la valeur suivante de δ_{max} à considérer pour le montage des câbles :

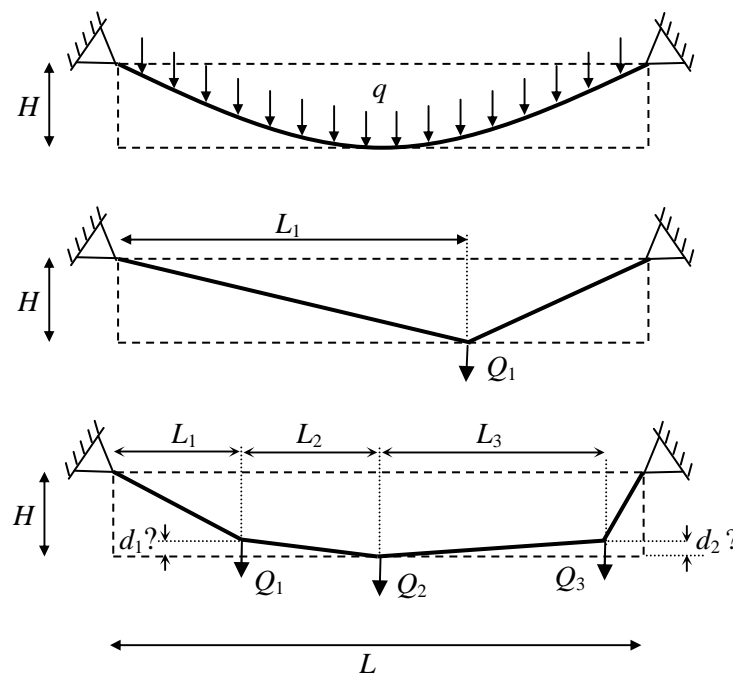
$$\frac{L}{\delta_{\text{max}}} = 250 \quad \text{donc} \quad \delta_{\text{max}} = 19520/250 = 78,1 \text{ mm}$$

3. LES SITUATIONS RENCONTRÉES EN PRATIQUE

Indépendamment des hypothèses de calcul, des méthodes particulières de résolution, du type de chargement ou de la position des appuis, diverses situations peuvent se présenter à l'ingénieur praticien ou l'architecte. Nous en retiendrons trois :

→ L'approche de conception

C'est celle de l'architecte qui impose les dimensions globales de la structure et qui demande à l'ingénieur de lui calculer la faisabilité de son projet. Dans ce contexte, **les données** sont les dimensions L et H du câble chargé ainsi que la valeur et la position des charges. **Les indéterminées** sont alors la géométrie exacte du câble chargé, les efforts internes (et réactions d'appui) et la longueur du câble avant (L_0) et après chargement.

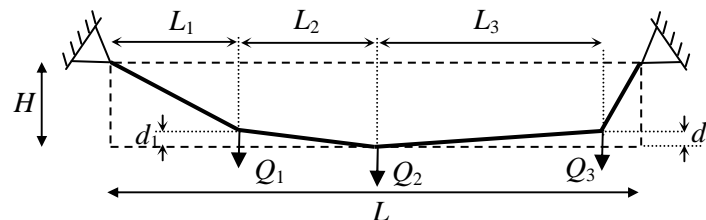


Données : dimensions (L , H), valeurs q ou Q_i et position horizontale L_i des charges.

Indéterminées : géométrie exacte (d_1 , d_2), efforts internes et réactions d'appui, longueur du câble.

→ L'approche d'expertise

Cette approche est celle de l'expert, face à sa mission d'enquête, qui a la possibilité de relever *in situ* la géométrie déformée de la structure et d'évaluer la valeur et la position des charges. D'un point de vue calcul, ce cas est plus facile à appréhender que le précédent puisqu'il s'en distingue par le fait que la déformée exacte, et donc aussi la longueur du câble, sont cette fois connues¹. De ce point de vue, c'est donc un cas particulier de l'approche de conception.

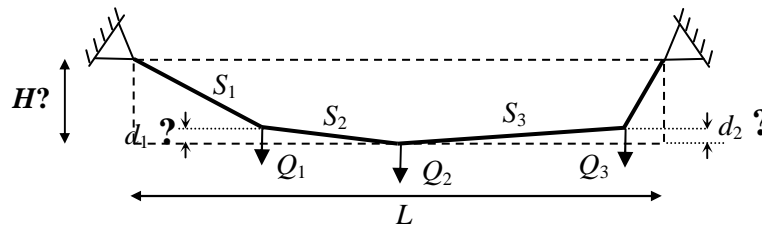


Données : dimensions (L , H), valeurs q ou Q_i et position horizontale L_i des charges, longueur du câble, géométrie exacte (d_1 , d_2).

Indéterminées : efforts internes, réactions d'appui, longueur initiale L_0 du câble

→ L'approche pragmatique

Cette approche consiste à mettre en place un câble de longueur initiale L_0 connue sur lequel ont été préalablement accrochées les charges. Dans ce contexte, **les données** sont la longueur initiale du câble et la position des charges le long du câble (ainsi que leur valeur). **Les indéterminées** sont la flèche maximale H du câble, sa géométrie exacte, les efforts internes, les réactions d'appui et la longueur du câble chargé (compte tenu de son allongement).



Données : portée (L), valeurs Q_i des charges et longueur S_i des tronçons, longueur initiale du câble L_0 .

Indéterminées : géométrie exacte (d_1 , d_2) et flèche maximale H , longueur du câble chargé, efforts internes et réactions d'appui.

¹ Précisons toutefois que la valeur q ou Q_i des charges pourrait être une inconnue du problème, auquel cas la résolution se complexifie et peut comporter plusieurs solutions. Ce type de problème ne sera pas abordé dans ce chapitre.

4. LES HYPOTHÈSES SIMPLIFICATRICES

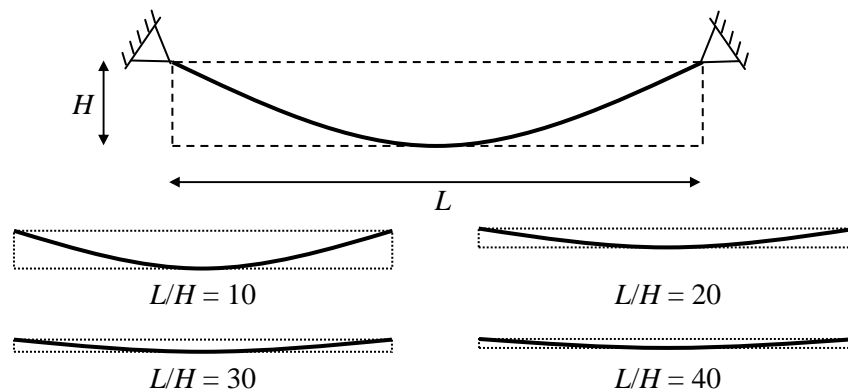
Comme expliqué au §1, la non linéarité du comportement propre à un câble peut rendre les méthodes de calcul lourdes et fastidieuses. Rappelons cependant que la plupart des logiciels actuels sont capables de traiter les problèmes sans aucune simplification. Il reste toutefois utile de pouvoir apprécier l'influence de certaines hypothèses, combinables ou non, pouvant entraîner une simplification non négligeable des problèmes. Ces hypothèses simplificatrices sont les suivantes :

→ La parfaite flexibilité du câble

Vu la très grande flexibilité des câbles, cette hypothèse postule que le moment fléchissant est nul en toute section de ceux-ci.

→ L'élancement géométrique L/H

Quand un câble est très tendu, on dit qu'il est *élancé*² ou que son *élancement* L/H est grand. Pour $L/H = 10$, la longueur du câble ne vaut que 1,026 fois sa portée L et on peut raisonnablement commencer, pour L/H supérieur à 10, à parler de grand élancement.



Comme expliqué au §2.1, la charge peut ne pas être distribuée de manière uniforme par unité de longueur horizontale (charge de type 2), de telle sorte que plus l'élancement L/H du câble est faible, plus sa forme quitte la parabole pour rejoindre celle de la chaînette, d'équation plus complexe.

L'hypothèse de grand élancement L/H permet de considérer que les charges de type 1 et 2 sont équivalentes, ce qui a pour conséquence de pouvoir adopter la géométrie parabolique.

² On parle aussi de câble *surbaisé* mais cette dénomination prête à confusion.

⇒ L'inextensibilité du câble

Le câble travaille en traction, contrairement à l'arc comprimé dont le dimensionnement au flambement lui confère une section qui travaille souvent bien loin de la limite d'élasticité du matériau et qui en fait une structure très peu déformable lorsqu'il est le funiculaire des charges. Par ailleurs, le type d'acier utilisé pour les câbles est souvent un matériau à très haute limite d'élasticité (1000 [MPa]...1500 [MPa]...). Il en résulte qu'ils peuvent avoir une section très faible par rapport aux efforts qu'ils supportent et que leur longueur, après mise en charge, peut être sensiblement plus grande que la longueur à la pose. L'hypothèse d'inextensibilité est donc à faire avec prudence et ne peut être considérée que lors d'un avant-projet.

On montrera au §5.2 que **l'hypothèse d'inextensibilité est en faveur de la sécurité à la rupture**, mais qu'elle peut par contre sous-estimer grandement l'augmentation verticale de la flèche H du câble, et ceci d'autant plus que celui-ci est élancé.

⇒ L'importance relative des charges ponctuelles et des charges réparties

Selon l'importance relative des charges ponctuelles et des charges réparties (par exemple le poids propre), on pourra négliger les unes ou les autres. Il est évident qu'un tel choix n'est pas toujours facile et nécessite de la part de l'ingénieur qui le fait suffisamment de sens pratique et d'expérience.

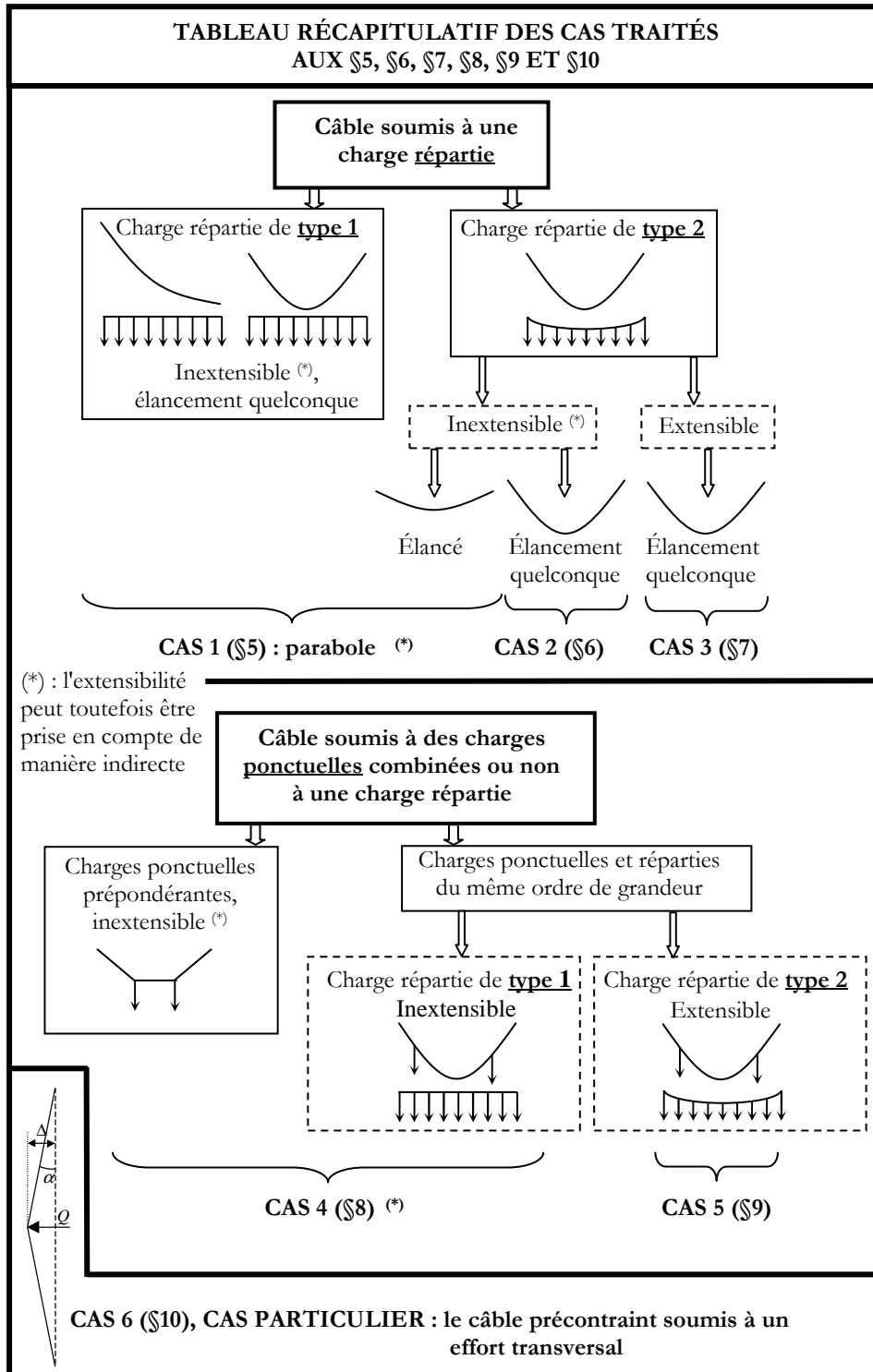
⇒ L'importance du poids propre

Négliger le poids propre doit se faire en connaissance de cause. De façon générale, lorsqu'un câble est dimensionné pour reprendre des charges extérieures et qu'il travaille à une contrainte proche de sa limite d'élasticité, le poids propre est négligeable. Ceci est détaillé au §5.1.

Toutefois, il peut arriver que, pour diverses raisons (limitation des effets de la fatigue, décalage des modes propres, déformabilité, etc...), un câble travaille à une contrainte bien inférieure à sa limite d'élasticité. Dans ce cas il se peut que le poids propre du câble ne soit pas négligeable et il est alors opportun d'en tenir compte.

Les commentaires précédents permettent d'établir le schéma de la page 333, qui met en évidence six cas distincts, correspondant chacun à une situation, des hypothèses et des équations descriptives parfois très différentes. Ces six cas sont étudiés en détails aux §5, §6, §7, §8, §9 et §10.

**TABLEAU RÉCAPITULATIF DES CAS TRAITÉS
AUX §5, §6, §7, §8, §9 ET §10**



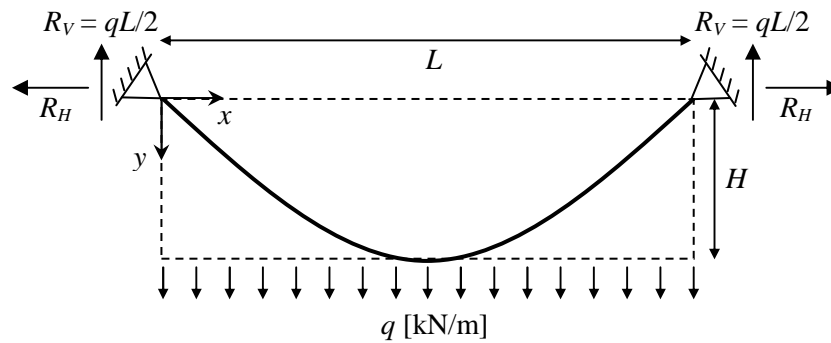
5. CAS 1 : CÂBLE PARABOLIQUE

Comme le montre le récapitulatif en page 333, cette situation correspond à :

- un câble inextensible d'élanement L/H quelconque soumis à une charge distribuée de type 1, grande par rapport au poids propre du câble;
- un câble inextensible d'élanement L/H grand (câble fort tendu) soumis à une charge distribuée de type 2, comme son poids propre par exemple.

Remarque 1 : il est possible de prendre indirectement en compte l'extensibilité du câble comme expliqué au §5.2.

Remarque 2 : il est possible de prendre en compte des appuis situés à des niveaux différents (voir §11, exemples 1, 2 et 3).



La réaction horizontale R_H s'obtient en faisant l'équilibre de rotation de la moitié gauche du câble, par rapport à son point bas. On obtient exactement les mêmes valeurs que pour l'arc funiculaire (chapitre 11, §3) :

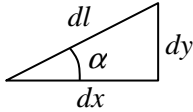
$$R_H H + \frac{qL}{2} * \frac{L}{4} = R_V \frac{L}{2} \quad \text{avec} \quad R_V = \frac{qL}{2} \quad \Rightarrow \quad R_H = \frac{qL^2}{8H} \quad [1]$$

Notons que, pour un câble oblique dont la distance verticale avec sa corde à mi-portée est notée δ_{\max} , la réaction horizontale est encore la même que pour l'arc oblique, soit $qL^2/8\delta_{\max}$ (voir chapitre 11, §3.5).

On démontre aussi, de la même manière que pour l'arc, que la géométrie est une parabole. En effet, le moment en tout point de coordonnées (x,y) est nul et, en considérant la partie de câble située à gauche de ce point, on a :

$$M(x, y) = \frac{qL}{2} x - \frac{qL^2}{8H} y - (qx) \frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4H}{L^2} x(L-x) \quad [2]$$

L'effort maximal se produit aux appuis et vaut :

$$N_{\max} = \sqrt{R_H^2 + R_V^2} = \frac{qL^2}{8H} \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{L}\right)^2} \quad [3]$$


Enfin, la longueur totale du câble vaut (voir figure correspondante et démonstration au chapitre 11 relatif aux arcs funiculaires, §3.4) :

$$L_0 = \int_l dl = \int_0^L \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{L}{2} f\left(\frac{L}{H}\right)$$

$$\text{avec } f\left(\frac{L}{H}\right) = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{4H}{L}\right)^2} + \frac{L}{4H} \ln \left[\frac{4H}{L} + \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{L}\right)^2} \right] \right) \quad [4]$$

Les équations précédentes sont adaptables lorsque les appuis ne sont pas au même niveau : voir exemples 1 à 3 au §11.

Mode de résolution dans un cas de conception ou d'expertise :

L , H et q sont connus. On en déduit directement la géométrie parabolique par [2], les réactions d'appui par [1], l'effort normal maximal par [3] et la longueur du câble par [4].

Mode de résolution pour l'approche pragmatique :

ce cas consiste à mettre en place, entre deux appuis distants de L , un câble de longueur L_0 donnée, éventuellement chargé avant ou après mise en place par une charge uniformément répartie.

Dans ce cas, la relation implicite [4] permet de calculer la flèche H en fonction de la longueur du câble L_0 et de la portée L qui sont connus. Les équations [1] à [3] permettent ensuite de calculer directement les réactions d'appui, l'effort maximal dans le câble et l'équation de la parabole.

5.1. Peut-on négliger le poids propre du câble ?

Soit q_{ext} la charge extérieure et q_{pp} la charge de poids propre du câble, considérées toutes deux comme des charges de type 1. La charge totale q est alors la somme de ces deux charges. Soit ρ le poids volumique de l'acier [kN/m³] et σ la contrainte à laquelle le câble travaille en service, incluant donc les coefficients de sécurité.

La charge de poids propre q_{pp} n'est pas connue puisque le poids propre dépend de la section A du câble, qui elle-même dépend de l'effort maximal N_{\max} calculé à partir de la charge totale.

Sachant que si le câble travaille à la contrainte de service σ , on a :

$$A = \frac{N_{\max}}{\sigma} \quad \text{et} \quad \rho A = q_{pp} \quad \Rightarrow \quad N_{\max} = \frac{\sigma}{\rho} q_{pp}$$

Par ailleurs, en réécrivant [3], on obtient :

$$N_{\max} = \frac{(q_{pp} + q_{ext})L^2}{8H} \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{L}\right)^2}$$

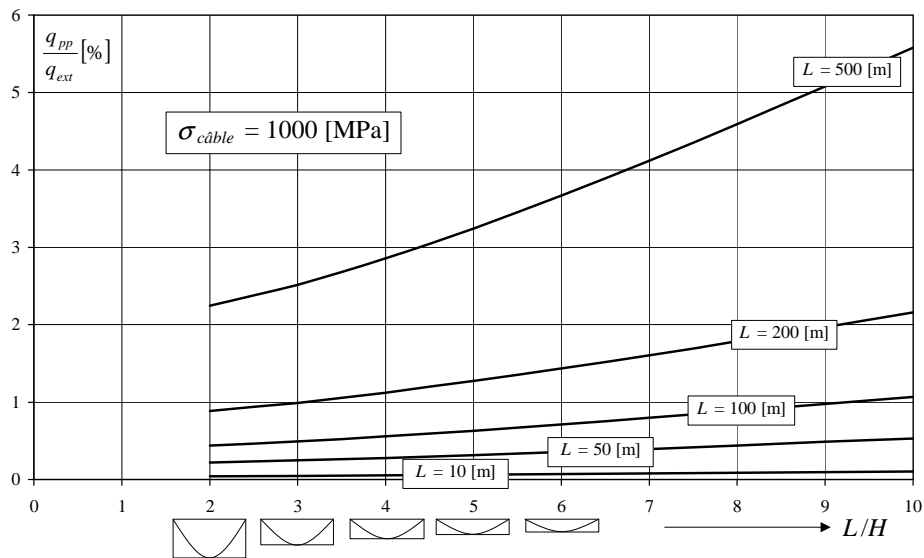
En éliminant N_{\max} des deux équations précédentes, on obtient une nouvelle équation dans laquelle seule la charge de poids propre q_{pp} est inconnue :

$$\sigma \frac{q_{pp}}{\rho} = \frac{(q_{pp} + q_{ext})L^2}{8H} \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{L}\right)^2}$$

Elle peut encore s'écrire :

$$\frac{q_{pp}}{q_{ext}} = \frac{1}{\left(\frac{\sigma}{\rho L}\right) \frac{8H}{L} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4H}{L}\right)^2}} - 1} \quad [5]$$

L'équation précédente permet d'établir la figure ci-dessous, calculée en considérant une contrainte de service σ égale à 1000 [MPa] et un poids volumique de 785.10^{-7} [N/mm³].



Cette figure montre que, même pour un câble en acier de 500 mètres de portée déjà relativement élancé ($L/H = 10$) et travaillant à une contrainte de 1000 [MPa], le poids propre ne représente que 5,5% de la charge extérieure.

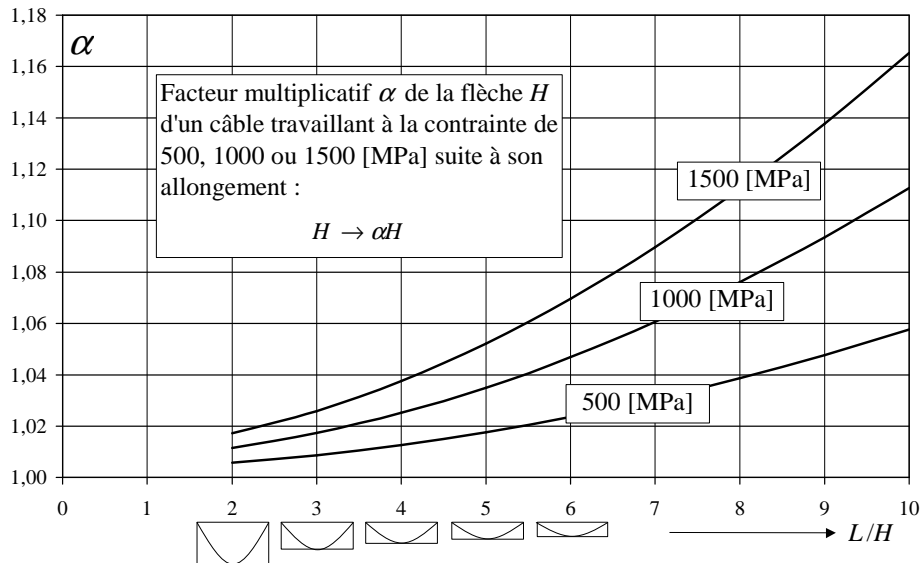
5.2. Peut-on négliger l'extensibilité du câble ?

Il est, à ce stade, intéressant de se demander quelle est l'influence de l'hypothèse d'inextensibilité sur les résultats. En supposant que le câble travaille à la contrainte de service σ , sa longueur après chargement vaut $L_0 + (\sigma/E_c)L_0$ en vertu de la loi de Hooke (chapitre 1, §7).

En prenant $\sigma = 1000$ [MPa] et $E_c = 170.000$ [MPa], un allongement maximal du câble de 0,6% est obtenu. L'équation [4] de la page 335 permet alors, par une résolution numérique, de calculer la flèche αH ($\alpha > 1$) du câble après déformation, en fonction de son élancement géométrique L/H :

$$\left\{ \begin{array}{l} [4] : \frac{L_0}{L} = f\left(\frac{L}{H}\right) \\ [4] : \frac{1,006L_0}{L} = f\left(\frac{L}{\alpha H}\right) \quad (\alpha > 1) \end{array} \right. \Rightarrow 1,006 f\left(\frac{L}{H}\right) = f\left(\frac{L}{\alpha H}\right) \text{ implicite en } \alpha$$

La résolution de l'équation précédente pour plusieurs valeurs de L/H permet de tracer la figure suivante :



Le graphique ci-dessus est éloquent : il montre que plus le câble est élancé (L/H grand), plus son augmentation relative de flèche H va être importante lors de la mise en charge. Par exemple, pour un élancement prévu de $L/H=5$, H augmentera de 5% pour un acier travaillant à 1500 [MPa].

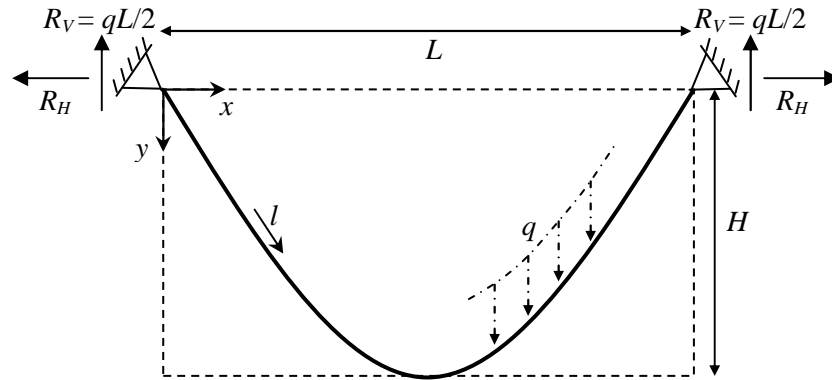
En d'autres termes, **plus l'hypothèse de grand élancement est valable, moins celle d'inextensibilité l'est**. Cette conclusion est toutefois à prendre avec certaines réserves. En effet, une augmentation de la flèche H aura pour effet de diminuer non seulement les réactions horizontales mais aussi l'effort maximal dans le câble, comme le montrent [1] et [3]. Ceci veut donc dire que **même si l'hypothèse d'inextensibilité peut sous-estimer largement les déplacements, elle est en faveur de la sécurité**.



Câbles de contreventement d'une ossature métallique devant être couverte d'une toile tendue. Sur la photo les câbles n'ont pas encore été complètement tendus. (Station de Métro Erasme, Bruxelles, 2003 – architectes et ingénieurs Samyn and Partners avec le bureau d'études Setesco; Photo Guy Clantin).

6. CAS 2 : CÂBLE INEXTENSIBLE EN CHAÎNETTE

Comme le montre le récapitulatif en page 333, cette situation correspond à un câble inextensible d'élanement L/H quelconque soumis à son poids propre combiné éventuellement à une autre charge distribuée de type 2. Si L/H est grand, on se retrouve dans le cas 1 (§5).



L'approche de calcul consiste ici à isoler un morceau infinitésimal de câble et à établir des équations d'équilibre en fonction de sa géométrie. Cette démarche conduit aux équations ci-dessous, dans lesquelles l est la coordonnée courante le long du câble, R_H la réaction d'appui horizontale, $N(x)$ l'effort dans le câble, L_0 la longueur totale du câble et q la charge par mètre *le long* du câble, c'est-à-dire le poids d'un mètre de câble et de couverture, le cas échéant.

Équation implicite en R_H :

$$L_0 = \frac{2R_H}{q} \operatorname{sinhyp}\left(\frac{qL}{2R_H}\right) \quad [1]$$

Le calcul de R_H permet alors l'utilisation des expressions suivantes, dans lesquelles sinhyp et coshyp sont les fonctions sinus et cosinus hyperboliques :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = \frac{R_H}{q} \left(\operatorname{coshyp}\left(\frac{qL}{2R_H}\right) - \operatorname{coshyp}\left(\frac{q}{R_H}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right) \right) \quad [2] \\ l(x) = \frac{R_H}{q} \left(\frac{qL_0}{2R_H} - \operatorname{sinhyp}\left(\frac{q}{R_H}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right) \right) \quad [3] \\ N(x) = R_H \operatorname{coshyp}\left(\frac{q}{R_H}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right) \quad [4] \end{array} \right.$$

Pour rappel, $\operatorname{sinhyp}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{coshyp}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Mode de résolution dans un cas de conception ou d'expertise :

L , H et q sont connus.

L'équation implicite [2] fournit la valeur de R_H (en posant $y(x = L/2) = H$).

L'équation [1] donne alors directement L_0 .

L'équation [2] donne la géométrie et la [4] l'effort dans le câble (maximal en $x=0$).

Mode de résolution pour l'approche pragmatique :

La longueur du câble L_0 est connue, ainsi que L et q .

L'équation implicite [1] fournit la valeur de R_H .

L'équation [2] donne la géométrie et la [4] l'effort dans le câble (maximal en $x = 0$).

Remarque : si les appuis ne sont pas au même niveau, se rapporter au CAS 3.

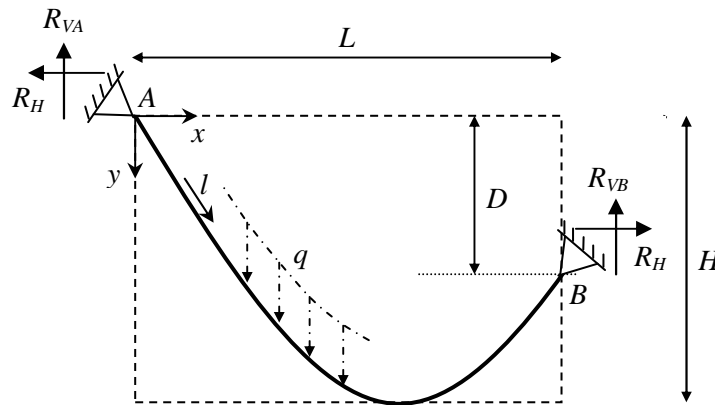


Mâts haubanés pour éoliennes. (îles du Cap Vert, Boa-Vista; Photo de l'auteur, 2001)

7. CAS 3 : CÂBLE EXTENSIBLE EN CHÂÎNETTE

Comme le montre le récapitulatif en page 333, cette situation correspond à un câble extensible d'élancement L/H quelconque soumis à son poids propre combiné éventuellement à une autre charge distribuée de type 2.

Remarque : si le câble est élancé et que l'on peut considérer que son allongement est négligeable, on se retrouve dans le cas 1 (§5).



La longueur du câble après mise en place n'étant plus la même que la longueur initiale L_0 , le calcul se complique. Comme pour le cas 2, les équations s'obtiennent en écrivant l'équilibre d'un tronçon de câble de longueur infinitésimale, qui subit cette fois un certain allongement proportionnel à l'effort qui y règne.

Cette démarche conduit aux équations ci-dessous, dans lesquelles l est la coordonnée courante le long du câble *avant* déformation, R_H la réaction d'appui horizontale, R_{VA} la réaction verticale à l'appui gauche, $N(l)$ l'effort dans le câble, L_0 et A_0 respectivement la longueur totale du câble et sa section *avant* mise en place et q la charge par mètre courant *le long* du câble.

Équations implicites en R_H et R_{VA} :

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \frac{R_H L_0}{EA_0} + \frac{R_H}{q} \left(\operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA}}{R_H} \right) - \operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA} - qL_0}{R_H} \right) \right) \quad [1] \\ D = \frac{L_0}{EA_0} \left(R_{VA} - \frac{qL_0}{2} \right) + \frac{R_H}{q} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA}}{R_H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA} - qL_0}{R_H} \right)^2} \right) \quad [2] \end{array} \right.$$

Si les appuis sont au même niveau, ces équations deviennent :

$$R_{VA} = \frac{qL_0}{2} \quad \text{et} \quad L_0 = \frac{2R_H}{q} \operatorname{sinhyp} \left(\frac{qL}{2R_H} - \frac{qL_0}{2EA_0} \right)$$

Le calcul numérique de R_H et R_{VA} permet alors l'utilisation des expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(l) = \frac{l}{EA_0} \left(R_{VA} - \frac{ql}{2} \right) + \frac{R_H}{q} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA}}{R_H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA} - ql}{R_H} \right)^2} \right] \end{array} \right. \quad [3]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(l) = \frac{R_H l}{EA_0} + \frac{R_H}{q} \left(\operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA}}{R_H} \right) - \operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA} - ql}{R_H} \right) \right) \end{array} \right. \quad [4]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N(l) = \sqrt{R_H^2 + (R_{VA} - ql)^2} \end{array} \right. \quad [5]$$

Mode de résolution dans un cas de conception ou d'expertise :

L , H , q , E et A_0 sont connus.

La résolution numérique du système d'équations [1], [2] et [3 ou 4] fournit la valeur de R_H , R_{VA} et L_0 (en posant $y(l=L_0) = D$ ou encore $x(l=L_0)=L$).

L'équation [5] donne alors directement $N(l)$ et $N_{\max}=N(l=0)$.

Mode de résolution pour l'approche pragmatique :

la longueur du câble L_0 est connue, ainsi que L , q , E et A_0 .

Les équations [1] et [2] permettent de calculer les réactions R_H et R_{VA} .

Les équations [3] et [4] donnent la géométrie et la [5] l'effort dans le câble (maximal en $l=0$).

8. CAS 4 : CÂBLE INEXTENSIBLE SOUMIS À DES CHARGES PONCTUELLES

Comme le montre le récapitulatif en page 333, cette situation correspond à un câble inextensible d'élanement L/H quelconque soumis à des charges ponctuelles grandes par rapport au poids propre du câble, qu'on suppose négligeable. Les propos de cette page sont également valables si les charges ponctuelles sont combinées à une charge de type 1.

Remarque : l'extensibilité peut être prise en compte de manière indirecte, comme illustré dans l'exemple 5 du §11.

Le théorème d'analogie avec la poutre (§2.7) prend ici toute son importance.

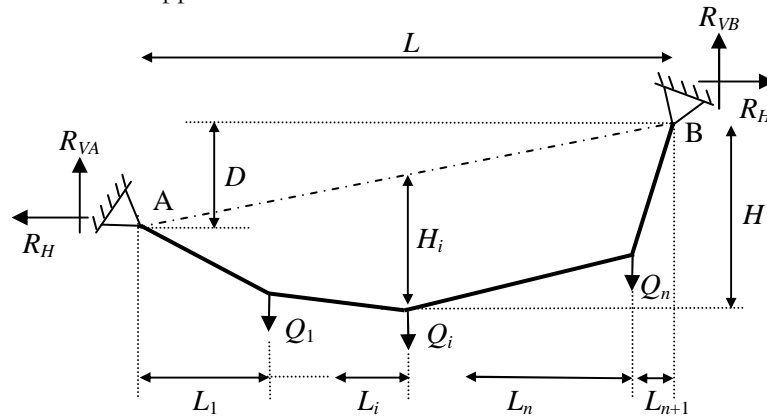
Mode de résolution dans un cas de conception ou d'expertise :

sont connus : L, H, D , les charges Q_1, \dots, Q_n ainsi que leur position horizontale L_1, L_2, \dots, L_n .

La première étape consiste à déterminer les 3 réactions d'appui inconnues. Les deux premières équations correspondent à l'équilibre vertical et à l'équilibre des couples par rapport au point A. Si les appuis ne sont pas au même niveau, l'équilibre des couples par rapport à l'autre appui B fournit la troisième équation. S'ils sont au même niveau, la troisième équation s'obtient en faisant l'équilibre des couples par rapport au point le plus bas du câble, dont la position s'obtient facilement grâce au théorème d'analogie avec la poutre (voir exemple 5, §11).

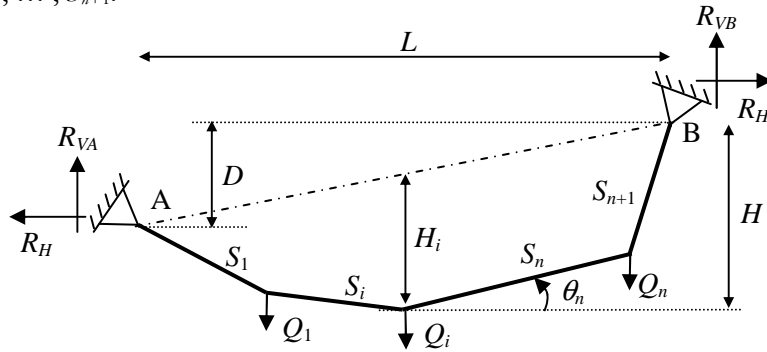
Ensuite, ce même théorème permet de déterminer la forme du câble et en particulier chaque hauteur H_i , de même que la longueur totale du câble L_0 .

Finalement, l'effort en toute section du câble est déterminé à partir de sa projection horizontale connue et égale à R_H . En particulier, l'effort maximal dans le câble s'obtient à l'un des appuis.



Mode de résolution pour l'approche pragmatique :

sont connus : L , L_0 , D , les charges Q_1, \dots, Q_n ainsi que la longueur de chaque tronçon S_1, \dots, S_{n+1} .



Cette fois le théorème d'analogie avec la poutre n'est plus utile. En effet, la position horizontale des charges est inconnue puisque celles-ci ont été placées sur le câble avant mise en place.

Si n est le nombre de charges appliquées au câble, les inconnues du problème sont les trois réactions d'appui, les $(n+1)$ efforts relatifs à chacun des tronçons rectilignes et les $(n+1)$ angles θ_i correspondants (voir figure ci-dessus). La longueur de ces tronçons étant connue, il y a donc un total de $(2n+5)$ inconnues à déterminer.

Les équations nécessaires peuvent se décomposer en deux groupes :

- la première équation est une condition géométrique tandis que les deux suivantes découlent de l'équilibre global de la structure :

$$\begin{cases} \sum S_i \cos \theta_i = L \\ R_{VA} + R_{VB} = \sum Q_i \\ R_{VB} L = R_H D + \sum_{i=1}^n \left(Q_i \left(\sum_{j=1}^i S_j \cos \theta_j \right) \right) \quad (\text{couples par rapport à A}) \end{cases}$$

- il faut déterminer les $(2n+2)$ équations supplémentaires nécessaires. A cet effet, il suffit d'effectuer une coupure fictive dans chacun des $(n+1)$ tronçons rectilignes et d'y écrire les équations d'équilibre vertical et horizontal de la partie de câble située à gauche de la coupure :

$$\begin{cases} N_i \cos \theta_i = R_H \\ N_i \sin \theta_i = R_{VA} - \sum_{j=1}^{i-1} Q_j \end{cases}$$

On sera particulièrement attentif au signe des $\sin \theta_i$ dans la seconde équation.

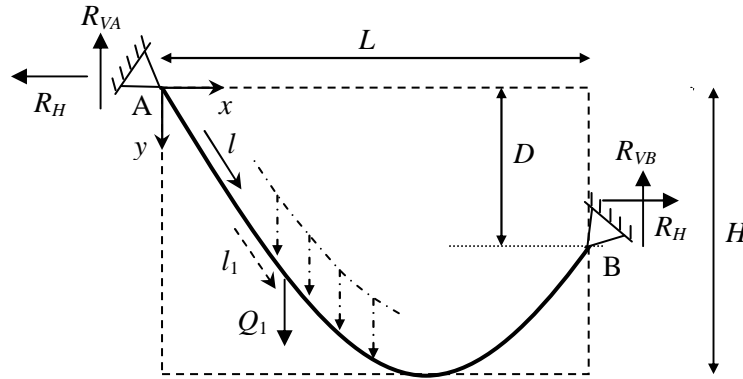


Passerelle suspendue et contreventée par des câbles. (Népal, Annapurna, Marsyangdi Khola; Photo Valérie Mabaut, 1997).

9. CAS 5 : CÂBLE EXTENSIBLE SOUMIS À DES CHARGES PONCTUELLES ET À UNE CHARGE RÉPARTIE DE TYPE 2

On se rapportera si nécessaire au récapitulatif de la page 333.

La plupart des logiciels commerciaux permettent actuellement de traiter numériquement ce genre de problème et nous donnons à titre d'information les équations non linéaires obtenues dans le cas où une seule charge est appliquée au câble.



$$\left\{ \begin{array}{l}
 y(l) = \frac{l}{EA_0} \left(R_{VA} - \frac{ql}{2} \right) + \frac{R_H}{q} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA}}{R_H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA} - ql}{R_H} \right)^2} \right] \quad (0 \leq l \leq l_1) \\
 y(l) = \frac{l}{EA_0} \left(R_{VA} - \frac{ql}{2} \right) + \frac{R_H}{q} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA}}{R_H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA} - Q_1 - ql}{R_H} \right)^2} \right. \\
 \quad \left. + \frac{Q_1 q L_0}{R_H EA_0} \left(\frac{l_1 - l}{L_0} \right) + \sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA} - Q_1 - ql_1}{R_H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA} - ql_1}{R_H} \right)^2} \right] \quad (l_1 \leq l \leq L_0) \\
 \\
 x(l) = \frac{R_H l}{EA_0} + \frac{R_H}{q} \left[\operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA}}{R_H} \right) - \operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA} - ql}{R_H} \right) \right] \quad (0 \leq l \leq l_1) \\
 x(l) = \frac{R_H l}{EA_0} + \frac{R_H}{q} \left[\operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA}}{R_H} \right) - \operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA} - Q_1 - ql}{R_H} \right) \right. \\
 \quad \left. + \operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA} - Q_1 - ql_1}{R_H} \right) - \operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA} - ql_1}{R_H} \right) \right] \quad (l_1 \leq l \leq L_0) \\
 \\
 N(l) = \sqrt{R_H^2 + (R_{VA} - ql)^2} \quad (0 \leq l \leq l_1) \\
 N(l) = \sqrt{R_H^2 + (R_{VA} - Q_1 - ql)^2} \quad (l_1 \leq l \leq L_0)
 \end{array} \right.$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \frac{R_H L_0}{EA_0} + \frac{R_H}{q} \left[\operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA}}{R_H} \right) - \operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA} - Q_1 - qL_0}{R_H} \right) \right. \\ \left. + \operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA} - Q_1 - ql_1}{R_H} \right) - \operatorname{arcsinhyp} \left(\frac{R_{VA} - ql_1}{R_H} \right) \right] \\ D = \frac{l}{EA_0} \left(R_{VA} - \frac{qL_0}{2} \right) + \frac{R_H}{q} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA}}{R_H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA} - Q_1 - qL_0}{R_H} \right)^2} \right. \\ \left. + \frac{Q_1 q L_0}{R_H EA_0} \left(\frac{l_1 - L_0}{L_0} \right) + \sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA} - Q_1 - ql_1}{R_H} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{R_{VA} - ql_1}{R_H} \right)^2} \right] \end{array} \right.$$

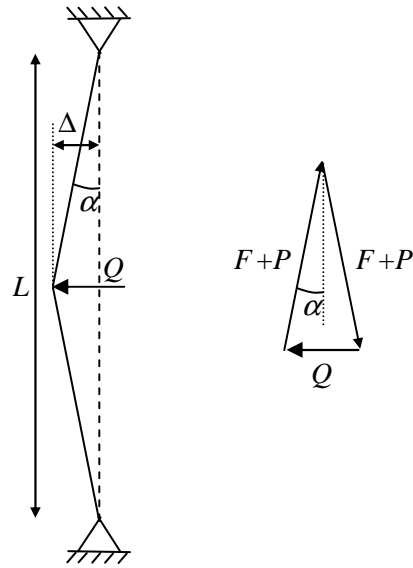


Un autre exemple de passerelle suspendue par des câbles. (Népal, Annapurna, Marsyangdi Khola; Photo Valérie Mabaut, 1997).

10. CAS 6 : CÂBLE PRÉCONTRAIT SOUMIS A EFFORT TRANSVERSAL

En dehors de son application comme suspente verticale, le câble droit, c'est-à-dire confondu avec la corde joignant ses appuis, possède une application importante dans l'accrochage des façades vitrées ou encore dans la réalisation de structures précontraintes ou sous-tendues.

On s'intéresse ici au cas du câble de poids propre négligeable, tendu selon sa corde avec un effort de précontrainte noté P et soumis ensuite à un effort ponctuel latéral Q s'appliquant à mi-longueur. En particulier, on désire voir de quelle manière la précontrainte P peut réduire la déformation Δ du câble produite par l'effort latéral Q .



F étant l'effort normal supplémentaire créé dans le câble par l'effort latéral Q , il s'allonge d'une valeur :

$$\Delta_c = \frac{FL}{E_c A} \quad [1]$$

On en déduit la valeur de l'angle α formé par le câble avec sa corde :

$$\sin \alpha = \frac{\Delta}{(L + \Delta_c)/2} \stackrel{[1]}{=} 2 \frac{\Delta}{L} \frac{1}{\left(1 + \frac{F}{E_c A}\right)} \quad [2]$$

Par ailleurs, l'équation d'équilibre des forces au point d'application de Q est la suivante :

$$2(F + P) \sin \alpha = Q$$

Et en y remplaçant le sinus par son expression en [2], on obtient :

$$4(F + P) \frac{\Delta}{L} \frac{1}{\left(1 + \frac{F}{E_c A}\right)} = Q \quad [3]$$

Afin d'éliminer l'effort inconnu F , une dernière équation, purement géométrique, peut être établie :

$$\sqrt{\Delta^2 + \frac{L^2}{4}} = \frac{1}{2}(L + \Delta_c)$$

En élevant les deux membres au carré et en négligeant le terme Δ_c^2 devant le terme $\Delta_c L$, on obtient :

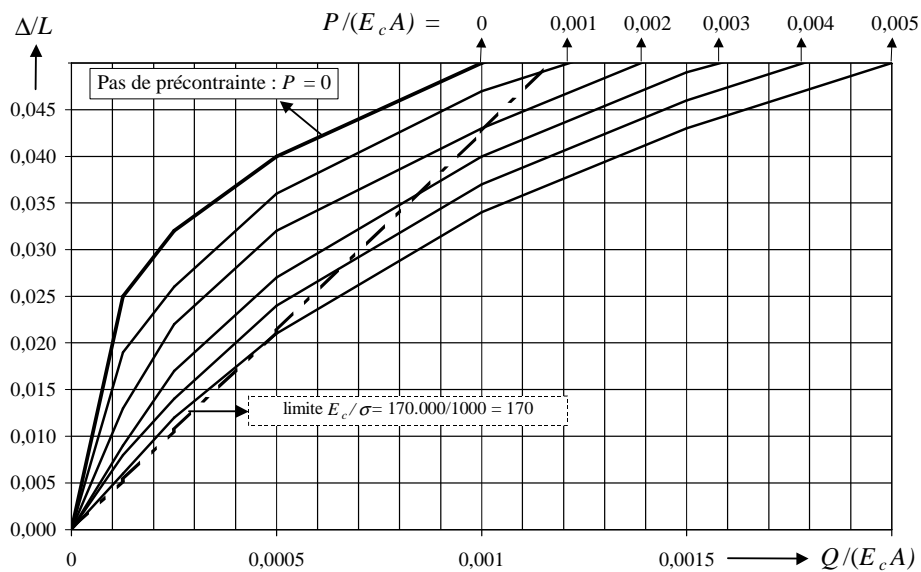
$$\frac{\Delta_c}{L} = 2\left(\frac{\Delta}{L}\right)^2 \quad [4]$$

En éliminant Δ_c à partir des relations [1] et [4] on trouve : $\frac{F}{E_c A} = 2\left(\frac{\Delta}{L}\right)^2$ [5]

Finalement, en insérant cette dernière équation dans [3], le terme en $F/E_c A$ est éliminé et, sachant que $2(\Delta/L)^2$ est négligeable devant 1, il vient :

$$8\left(\frac{\Delta}{L}\right)^3 + 4\frac{P}{E_c A}\left(\frac{\Delta}{L}\right) = \frac{Q}{E_c A}$$

Cette équation permet de tracer la figure ci-dessous qui donne en ordonnée les valeurs de Δ/L en fonction des valeurs de $Q/E_c A$ lues en abscisse. Chaque courbe peut être paramétrée en fonction de la valeur $P/E_c A$ de la précontrainte.



Cette figure illustre le fait que la précontrainte P est favorable à la réduction de la déformation du câble Δ due à un effort latéral Q .

Sur cette même figure, la droite en pointillés, tracée pour un acier caractérisé par une contrainte de service de 1000 [MPa] et un module d'élasticité E_c égal à 170.000 [MPa], détermine une limite. À droite de celle-ci, tous les points des courbes correspondent à des situations pour lesquelles la contrainte dans le câble dépasse la valeur admissible de 1000 [MPa], produite, soit par une précontrainte P trop grande, soit par un effort latéral Q trop élevé. On explique ci-dessous, en remarque, comment obtenir l'équation de cette droite.

Pour un tel type d'acier, La zone utilisable est donc comprise entre la courbe en gras relative à $P=0$ et la droite en pointillés.

En particulier, cette figure illustre que :

- plus la charge latérale Q à reprendre est élevée, moins la précontrainte peut être grande et moins elle est capable de réduire la flèche Δ produite par l'effort latéral Q ;

À l'inverse :

- moins la charge latérale Q à reprendre est élevée, plus la précontrainte peut être grande et capable de réduire la flèche Δ produite par l'effort latéral Q ;

Remarque : justification de la droite limite

La contrainte totale dans le câble doit être limitée à la contrainte de service σ :

$$(F + P)/A \leq \sigma$$

$$\text{Or, les équations [3] et [5] fournissent : } 4(F + P)\frac{\Delta}{L} = Q\left(1 + 2\left(\frac{\Delta}{L}\right)^2\right)$$

En éliminant $(F + P)$ des deux équations précédentes et sachant que $2(\Delta/L)^2$ est négligeable devant 1, on trouve :

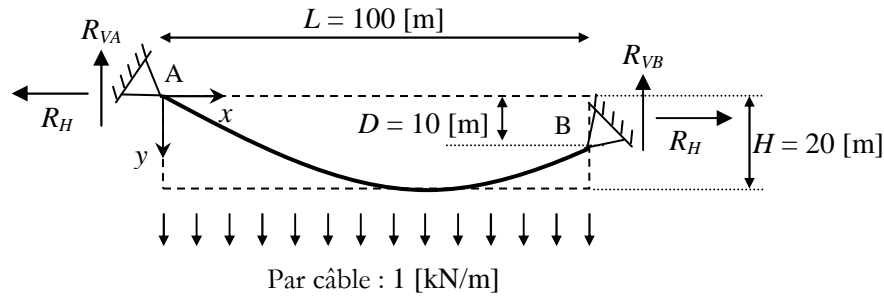
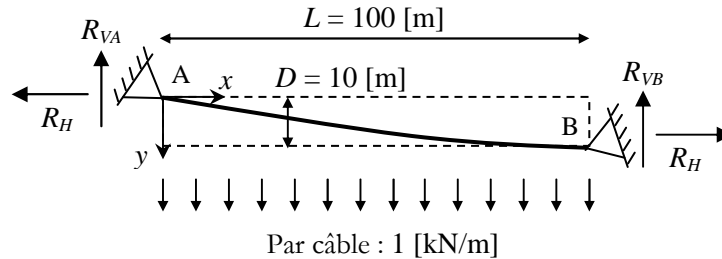
$$\frac{\Delta}{L} \geq (0,25E/\sigma)\frac{Q}{E_c A}$$

C'est l'équation d'une droite dont le coefficient angulaire vaut $0,25E/\sigma$.

11. EXEMPLES

Exemple 1 : (CAS 1, conception)

On veut concevoir une passerelle qui doit relier deux berges distantes de 100 mètres et montrant une différence de niveau de 10 mètres. Cette passerelle est composée de deux câbles parallèles auxquels est suspendu un tablier, à l'image des photos des pages 345 et 346. Pour chaque câble, la charge maximale, que l'on supposera uniformément distribuée par unité de longueur horizontale, vaut 1 [kN/m].

Situation 1 : le câble descend plus bas que l'appui droit :

Situation 2 : le câble ne descend pas plus bas que l'appui droit :


Dans la **situation 1**, la flèche du câble H doit être égale à 20 mètres.

Dans la **situation 2**, le câble ne peut descendre pas plus bas que l'appui de droite.

Dans les deux cas, il est proposé de calculer l'effort maximal dans le câble, les réactions d'appui et la géométrie du câble en considérant qu'il est inextensible.

On propose ensuite d'évaluer l'influence de l'extensibilité du câble.

Les hypothèses d'inextensibilité et de répartition uniforme des charges (de type 1) correspondent au cas 1 relatif aux câbles à géométrie parabolique (§5), dont certaines équations ont été établies au §3.5 du chapitre 11 relatif aux arcs funiculaires (appuis à des niveaux différents).

Situation 1 : $H = 20$ [m]

→ Calcul de la géométrie

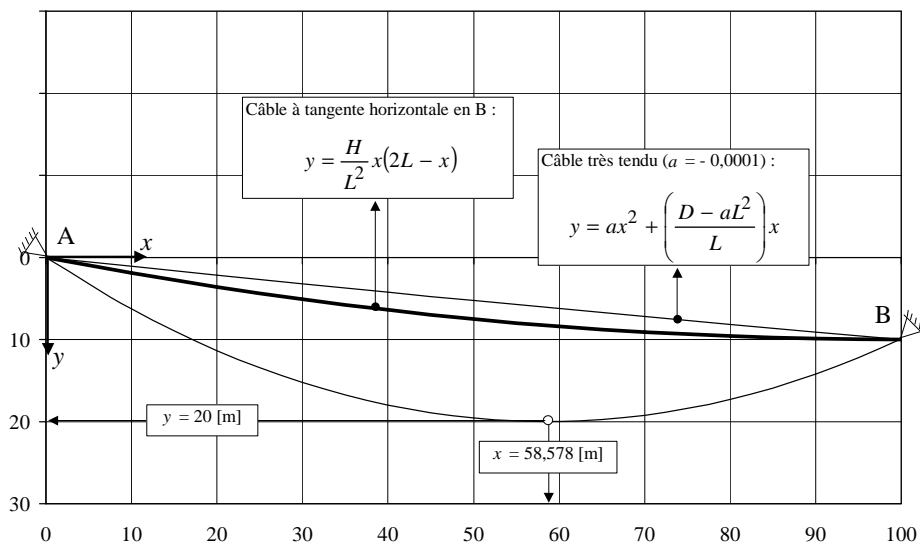
L'équation d'une parabole passant par deux appuis comportant une différence de niveau D et un point situé *plus bas* que les deux appuis a été établie au chapitre 11, §3.5 (voir figure ci-dessous) :

$$y = \frac{4H}{(\beta L)^2} x(\beta L - x) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{2H}{D} \left(1 - \sqrt{1 - D/H}\right)$$

Et le point bas est situé à une abscisse $\beta L/2$.

On obtient :

$$\begin{cases} \beta = 1,1716 \\ y = 0,005828x(117,16 - x) \text{ [m]} \\ \text{Point bas en } x = 58,578 \text{ [m]} \end{cases}$$



La résolution de l'intégrale suivante fournit la longueur du câble :

$$\begin{aligned}
 L_0 &= \int_0^L \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{100} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
 &= \int_0^{100} \sqrt{1 + (0,6828 - 0,0117x)^2} dx = 105,83 \text{ [m]}
 \end{aligned}$$

⇒ Réactions d'appui

Équilibre vertical : $R_{VA} + R_{VB} = qL$

Équilibre des moments par rapport à A : $\frac{qL^2}{2} = R_H D + R_{VB} L$

Équilibre du tronçon situé à gauche du point ($x = 58,578$, $y = 20$) par rapport à ce même point :

$$q * 58,578^2 / 2 + R_H H = R_{VA} * 58,578$$

On en déduit $R_H = 85,784$ [kN], $R_{VA} = 58,578$ [kN] et $R_{VB} = 41,421$ [kN].

⇒ Effort maximal dans le câble

Comme la réaction verticale est la plus grande en A, c'est donc à cet appui que l'effort dans le câble est le plus grand. Il vaut :

$$N_{\max} = \sqrt{R_H^2 + R_{VA}^2} = 103,877 \text{ [kN]}$$

⇒ Prise en compte de l'extensibilité du câble

L'effort normal moyen dans le câble peut être approximé par la moyenne entre l'effort à l'appui A, l'effort à l'appui B et l'effort R_H au point bas, soit :

$$(103,877 + 95,261 + 85,784) / 3 = 94,974 \text{ [kN]}.$$

Si le câble est dimensionné pour travailler à une contrainte de service de 1000 [MPa], sa section doit donc valoir $N_{\max} / 1000 = 104$ [mm²]. En prenant un module d'élasticité de 170.000 [MPa], son allongement vaut :

$$N_{\text{moy}} * L_0 / E_c A_c = (94974 * 105830) / (170000 * 104) = 568 \text{ [mm]}.$$

La longueur du câble après déformation est donc de : $105,830 + 0,568 = 106,398$ [m].

En pratique, on devrait donc mettre en place un câble raccourci de 568 [mm] afin de ne pas dépasser la flèche imposée de 20 mètres à l'état chargé : $105,830 - 0,568 = 105,262$ [m].

Situation 2 : câble horizontal à l'appui de droite

→ Calcul de la géométrie

Le cas limite d'un câble dont la tangente est horizontale à l'appui bas correspond à l'équation suivante (voir chapitre 11, §3.5) :

$$y = \frac{D}{L^2} x(2L - x) \quad \text{avec} \quad D = H$$

Entre cette courbe et la droite joignant les appuis, il existe une infinité d'équations de paraboles qui correspondent à des câbles de plus en plus tendus. L'équation de ces paraboles est la suivante :

$$y = ax^2 + \left(\frac{D - aL^2}{L} \right) x \quad \text{avec} \quad -D/L^2 \leq a \leq 0$$

Pour $a = 0$, on retrouve l'équation $y = Dx/L$ de la droite joignant les appuis.

Considérons la parabole tangente à l'horizontale en B pour la suite du calcul, dont l'équation est $y = 10^{-3} x(200 - x)$ [m].

Sa longueur totale vaut :

$$L_0 = \int_0^{100} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_0^{100} \sqrt{1 + (0,2 - 0,002x)^2} dx = 100,663 \text{ [m]}$$

→ Réactions d'appui

$$\text{Équilibre vertical : } R_{VA} + R_{VB} = qL$$

$$\text{Équilibre des moments par rapport à A : } \frac{qL^2}{2} = R_H D + R_{VB} L$$

L'ordonnée du point situé à mi-travée se calcule à partir de l'équation parabolique ci-dessus et vaut 7,5 [m]. L'équilibre de rotation de la partie gauche du

$$\text{câble par rapport à ce point s'écrit : } \frac{qL^2}{8} + 7,5R_H = 50R_{VA}$$

On en déduit $R_H = 500,0$ [kN], $R_{VA} = 100,0$ [kN] et $R_{VB} = 0$ [kN].

La valeur nulle de R_{VB} est logique puisqu'on ne pourrait avoir de réaction verticale induite par un câble qui arrive horizontalement sur un appui.

⇒ **Effort maximal dans le câble**

Comme la réaction verticale est la plus grande en A, c'est donc à cet appui que l'effort dans le câble est le plus grand. Il vaut :

$$N_{\max} = \sqrt{R_H^2 + R_{VA}^2} = 509,902 \text{ [kN]}$$

⇒ **Prise en compte de l'extensibilité du câble**

L'effort normal moyen dans le câble peut être évalué par la moyenne entre l'effort du côté de l'appui A et l'effort du côté de l'appui B, soit :

$$(509,902 + 500) / 2 = 504,951 \text{ [kN]}.$$

Si le câble est dimensionné pour travailler à une contrainte de 1000 [MPa], sa section doit donc valoir $N_{\max} / 1000 = 510 \text{ [mm}^2\text{]}$. En prenant un module d'élasticité de 170.000 [MPa], son allongement vaut :

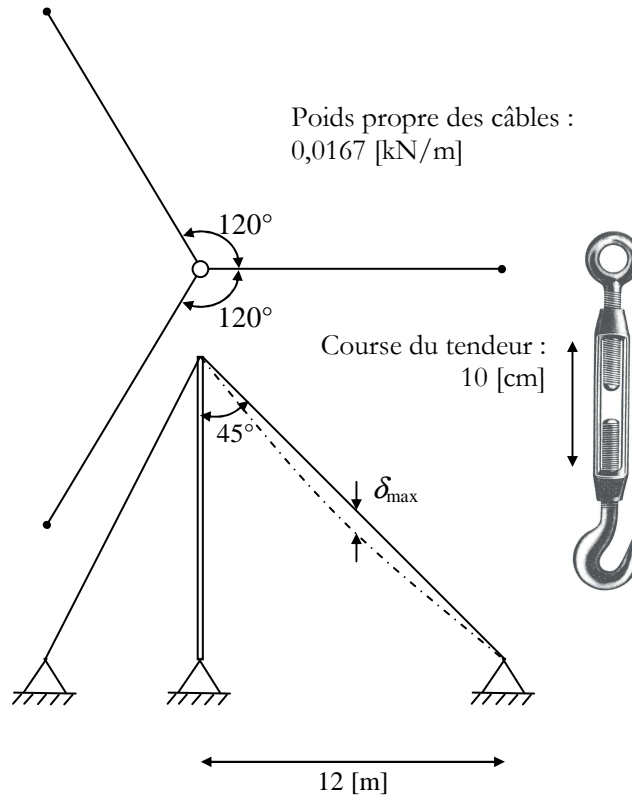
$$N_{\text{moy}} * L_0 / E_c A_c = (504951 * 100663) / (170000 * 510) = 586 \text{ [mm]}.$$

La longueur du câble après déformation est donc de : $100,663 + 0,586 = 101,249 \text{ [m]}$.

En pratique, on devrait donc mettre en place un câble raccourci de 586 [mm], ayant une longueur de : $100,663 - 0,586 = 100,077 \text{ [m]}$.

Exemple 2 : (CAS 1, conception ou approche pragmatique)

Un mât de 12 mètres de hauteur est stabilisé par trois câbles inclinés à 45 degrés, disposés à 120 degrés les uns des autres et supposés inextensibles :



Chaque câble est muni d'un tendeur mécanique qui permet de le mettre en tension après son accrochage aux extrémités. La longueur totale d'un câble, tendeur complètement tendu y compris, vaut $12\sqrt{2}$ [m].

On désire calculer :

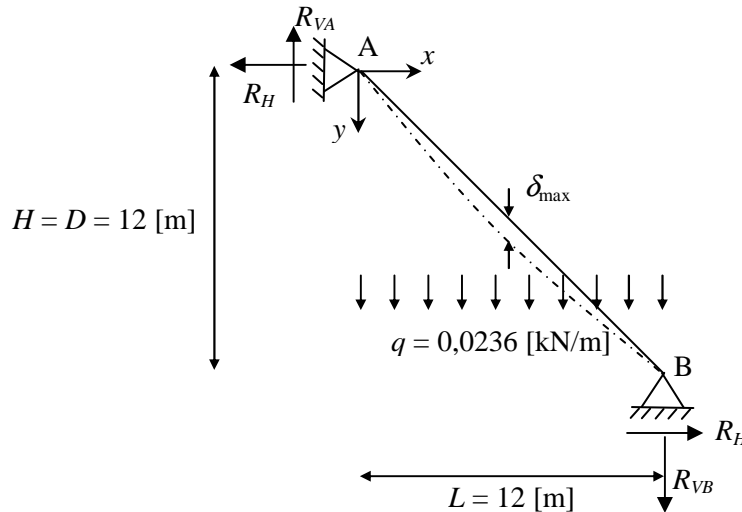
- la flèche maximale δ_{max} du câble lorsque le tendeur est complètement détendu, ce qui correspond à une longueur totale $12\sqrt{2} + 0,1 = 17,07$ [m].
- les réactions d'appui R_H et R_V qui correspondent à la situation précédente.
- pour un effort de précontrainte de 5 [kN] appliqué grâce au tendeur au pied du câble, on désire calculer la flèche maximale δ_{max} correspondante ainsi que le nombre de centimètres qui ont été pris sur le tendeur afin d'atteindre cette précontrainte.

→ Flèche maximale δ_{max} lorsque le tendeur est complètement détendu

La longueur totale du câble y compris tendeur, avant mise en tension, est égale à la valeur de $12\sqrt{2}$ [m] additionnée de la course maximale de 10 [cm] du tendeur, soit 17,07 [m].

Sachant que le poids propre du câble est de 0,0167 [kN/m], la charge distribuée prise par unité de longueur horizontale vaut :

$$0,0167 * 12\sqrt{2} / 12 = 0,0236 \text{ [kN/m]}$$



L'équation d'un câble parabolique oblique fortement tendu entre deux appuis est la suivante (elle a été établie au chapitre 11, §3.5 pour les arcs) :

$$y = ax^2 + (D - aL^2)x/L \quad \text{avec} \quad -D/L^2 \leq a \leq 0$$

ou encore, en y substituant les valeurs de L et H :

$$y = ax^2 + (1 - 12a)x \quad \text{avec} \quad -0,0833 \leq a \leq 0 \quad (\text{tout en [m]})$$

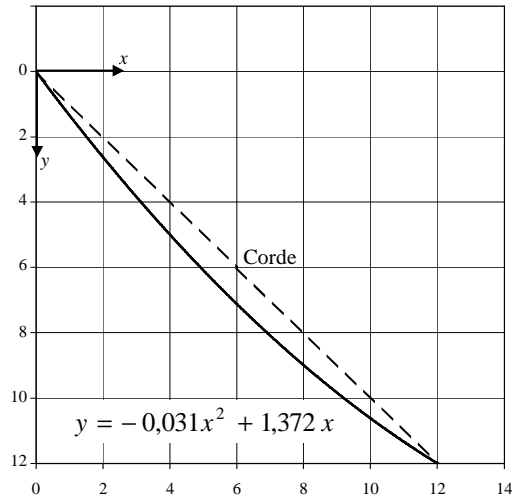
La valeur du paramètre a s'obtient par résolution de l'équation différentielle suivante (qui peut se résoudre par essais et erreurs à l'aide d'un tableur) :

$$17,07 = \int_0^L dl = \int_0^L \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{12} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$\text{Ou encore : } 17,07 = \int_0^{12} \sqrt{1 + (2ax + 1 - 12a)^2} dx$$

La solution est : $a = -0,031$ [m] et l'équation du câble est donc :

$$y = -0,031x^2 + 1,372x$$



La distance verticale δ entre le câble et sa corde d'équation $y = Dx/L = x$ vaut :

$$\delta = (-0,031x^2 + 1,372x) - x$$

La dérivée de cette expression vaut $d\delta/dx = -0,062x + 0,372$ et la flèche maximale δ_{\max} est donc obtenue à mi-portée ($0,372/0,062=6$) et vaut :

$$\delta_{\max} = (-0,031 * 6^2 + 1,372 * 6) - 6 = 1,116 \text{ [m]}$$

→ Réactions d'appui avant mise en tension

$$\text{Équilibre vertical : } R_{VA} - R_{VB} = qL = 0,2832 \text{ [kN]}$$

Équilibre des moments par rapport à A :

$$qL^2/2 + R_{VB}L = R_H D \rightarrow 0,1416 + R_{VB} = R_H$$

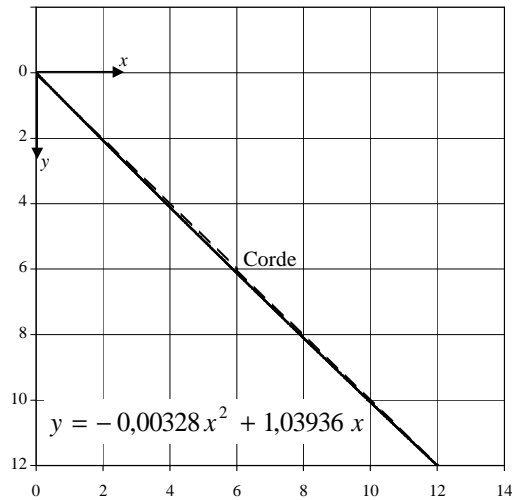
L'ordonnée du point situé à mi-portée se calcule à partir de l'équation parabolique ci-dessus et vaut 7,116 [m].

Équilibre de rotation de la partie droite par rapport à ce point :

$$qL^2/8 + 6R_{VB} = (12 - 7,116)R_H \rightarrow 0,4248 + 6R_{VB} = 4,884R_H$$

On en déduit $R_H = 0,381$ [kN], $R_{VA} = 0,522$ [kN] et $R_{VB} = 0,239$ [kN].

→ **Caractéristiques du câble après mise en tension**



On considère maintenant que le tendeur a permis d'introduire un effort de précontrainte de 5 [kN] dans le câble, au niveau de l'appui B.

Ceci permet d'établir l'équation suivante : $R_H^2 + R_{VB}^2 = 25$

Afin de déterminer les 4 inconnues R_H , R_{VA} , R_{VB} et δ_{\max} du problème, il faut encore écrire trois équations :

Équilibre vertical : $R_{VA} - R_{VB} = qL = 0,2832$ [kN]

Équilibre des moments par rapport à A : $0,1416 + R_{VB} = R_H$

Équilibre de rotation de la partie droite par rapport au point situé à mi-portée :

$$\frac{qL^2}{8} + 6R_{VB} = (6 - \delta_{\max})R_H \rightarrow 0,4248 + 6R_{VB} = (6 - \delta_{\max})R_H$$

Ce système de 4 équations à 4 inconnues peut être résolu assez facilement puisqu'il se résume à la résolution d'une équation du second degré en R_{VB} ou R_H .

On obtient :

$$R_H = 3,606 \text{ [kN]}, R_{VA} = 3,747 \text{ [kN]}, R_{VB} = 3,464 \text{ [kN]} \text{ et } \delta_{\max} = 0,118 \text{ [m]}$$

Pour cette valeur de la flèche δ_{\max} , on peut maintenant calculer celle du paramètre a ainsi que l'équation du câble :

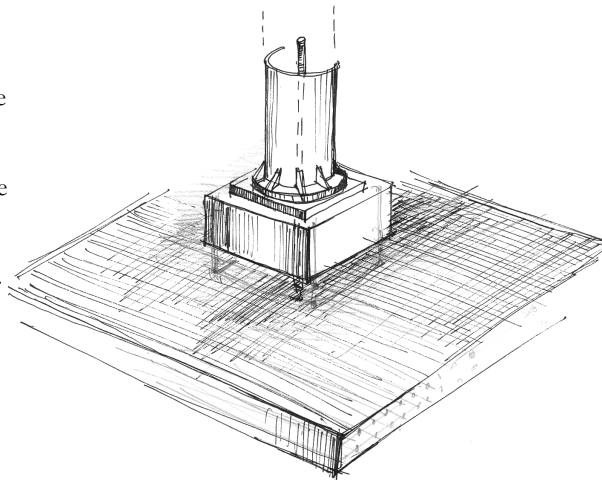
$$\begin{cases} \delta_{\max} = (a * 6^2 + (1 - 12a) * 6) - 6 = 0,118 \rightarrow a = -0,00328 \text{ [m]} \\ y = -0,00328x^2 + 1,03936x \text{ [m]} \end{cases}$$

La longueur totale du câble vaut alors :

$$\int_0^{12} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{12} \sqrt{1 + (-0,00656x + 1,03936)^2} dx = 16,972 \text{ [m]}$$

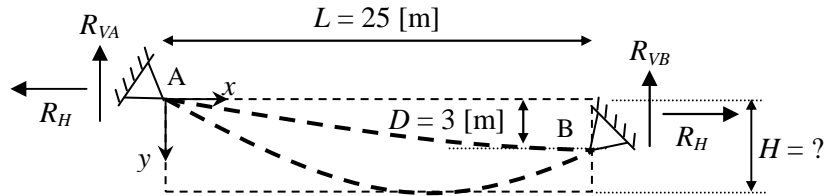
Pour arriver à introduire la précontrainte de 5 [kN] dans le câble, il a donc été nécessaire de raccourcir le câble, à l'aide du tendeur, d'une valeur de $17,070 - 16,972 = 0,098$ [m], soit 9,8 [cm].

Exemple de pied rotulé pour mât haubané : la plaque d'about repose sur le socle en béton par l'intermédiaire d'un appui en néoprène. La stabilité transversale est assurée par une tige métallique scellée dans le béton et traversant la plaque d'about, percée en son centre. Source : mât haubané servant de soutien au tilleul classé de Doyon en Belgique, plusieurs fois centenaire. Conception, ingénieur conseil : Pierre Latteur, 2004-2005.



Exemple 3 : (CAS 1, approche pragmatique)

Un câble d'une longueur initiale L_0 de 25,78 [m] est mis en place entre deux appuis situés à des niveaux différents et possède un poids propre de 0,1 [kN/m]. On recherche la géométrie du câble et les réactions d'appui (et à priori on ne sait pas si le câble comporte un point plus bas que l'appui B).

**Recherche du point bas du câble et de sa géométrie**

Le cas limite du câble dont la tangente est horizontale à l'appui bas correspond à l'équation suivante (voir chap. 11, §3.5) :

$$y = \frac{D}{L^2} x(2L - x) = 0,0048x(50 - x) \quad \text{et la longueur du câble est égale à :}$$

$$\begin{aligned} L_0 &= \int_0^L \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^{25} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{25} \sqrt{1 + (0,24 - 0,0096x)^2} dx = 25,238 \text{ [m]} \end{aligned}$$

Or, le câble à mettre en place a une longueur de 25,78 mètres. Il aura donc un point bas relatif à une valeur H à déterminer, situé plus bas que l'appui B. Les équations sont alors les suivantes (voir chap. 11, §3.5) :

$$y = \frac{4H}{(\beta L)^2} x(\beta L - x) = 0,0064 \frac{H}{\beta^2} x(25\beta - x)$$

$$\text{Avec } \beta = \frac{2H}{D} (1 - \sqrt{1 - D/H}) = 0,667H (1 - \sqrt{1 - 3/H})$$

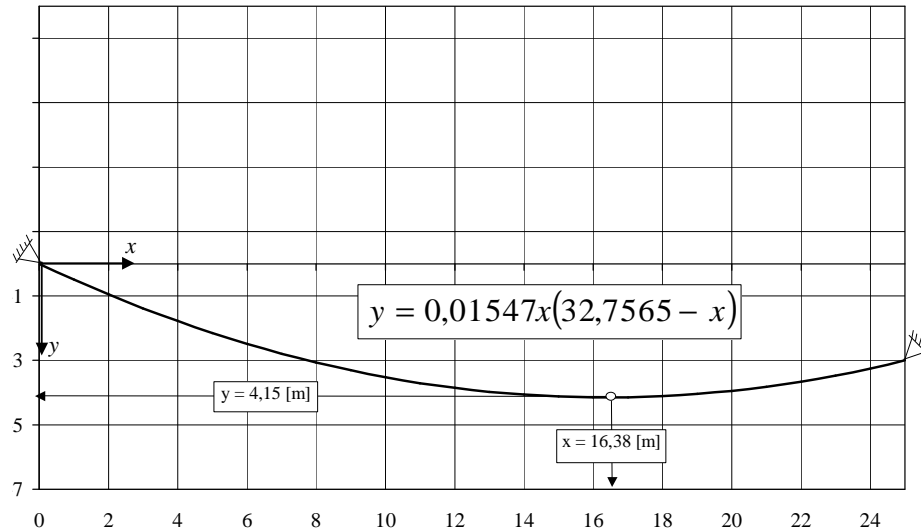
Il faut donc calculer H à partir de l'expression de la longueur L_0 et de sa valeur connue de 25,78 [m] :

$$L_0 = 25,78 = \int_0^{25} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

La résolution de cette équation ne peut se faire que par solveur numérique.

On obtient $H = 4,15$ [m], $\beta = 1,31025$, point bas en $x = \beta L / 2 = 16,38$ [m].

La parabole correspondante est illustrée à la figure ci-dessous :



⇒ Réactions d'appui

Le poids propre par mètre est de 0,1 [kN/m].

Équilibre vertical : $R_{VA} + R_{VB} = 2,5$

Équilibre des moments par rapport à A : $0,1 * 25^2 / 2 = 3R_H + 25R_{VB}$

Équilibre de rotation sur le tronçon gauche par rapport au point bas de coordonnées ($x=16,38, y=4,15$) :

$$\frac{0,1 * 16,38^2}{2} + 4,15R_H = 16,38R_{VA}$$

On en déduit $R_H = 3,242$ [kN], $R_{VA} = 1,638$ [kN] et $R_{VB} = 0,861$ [kN].

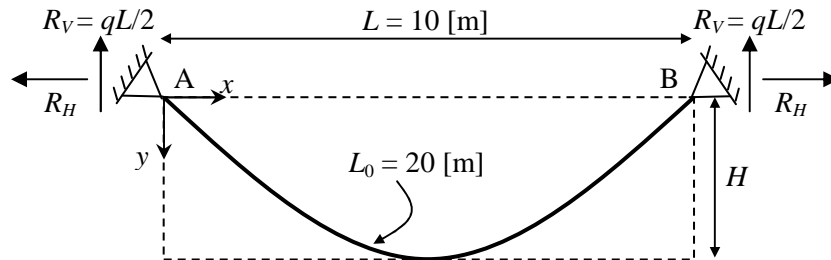
⇒ Effort maximal dans le câble

Comme la réaction verticale est la plus grande en A, c'est donc à cet appui que l'effort dans le câble est le plus grand. Il vaut :

$$N_{\max} = \sqrt{R_H^2 + R_{VA}^2} = 3,632 \text{ [kN]}$$

Exemple 4 : (CAS 1 et 2 : comparaison de la parabole et de la chaînette)

Un câble d'une longueur initiale L_0 de 20 mètres doit être installé entre deux appuis situés au même niveau et distants de 10 mètres. Sachant qu'il ne subit pas d'autres charges que son propre poids, on désire comparer les résultats en prenant comme hypothèse que la géométrie est parabolique, d'une part, et en chaînette, d'autre part.



Données : $L_0 = 20$ [m], A_0 , poids propre : $q = 2$ [N] par mètre de câble.

Calcul pour un câble inextensible parabolique (cas 1)**⇒ Calcul de la géométrie**

La flèche H du câble s'obtient par résolution numérique de la relation [4] du §5 :

$$20 = \frac{10}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{4H}{10}\right)^2} + \frac{10}{4H} \ln \left[\frac{4H}{10} + \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{10}\right)^2} \right] \right) \Rightarrow H = 8,173 \text{ [m]}$$

Et l'équation parabolique du câble est donc (repère en A) :

$$y = \frac{4H}{L^2} x(L - x) = 0,3269x(10 - x)$$

⇒ Calcul des réactions d'appui et de l'effort maximal dans le câble

Pris par unité de longueur horizontale, le poids propre du câble représente une charge $q = 20 \cdot 2 / 10 = 4$ [N/m], supposée constante de type 1. On a :

$$R_V = qL/2 = 20 \text{ [N]}, \quad R_H = qL^2/(8H) = 6,118 \text{ [N]},$$

$$N_{\max} = \sqrt{R_H^2 + R_V^2} = 20,91 \text{ [N]}$$

Calcul pour un câble inextensible en chaînette (cas 2)

Cette fois la charge q est une charge de type 2 qui vaut précisément 2 [N] par mètre pris *le long* du câble. Le calcul de la géométrie doit passer par celui de la réaction d'appui horizontale via l'équation suivante :

$$L_0 = \frac{2R_H}{q} \operatorname{sinhyp}\left(\frac{qL}{2R_H}\right) \Rightarrow 20 = R_H \operatorname{sinhyp}\left(\frac{10}{R_H}\right) \quad \text{soit } R_H = 4,592 \text{ [N]}$$

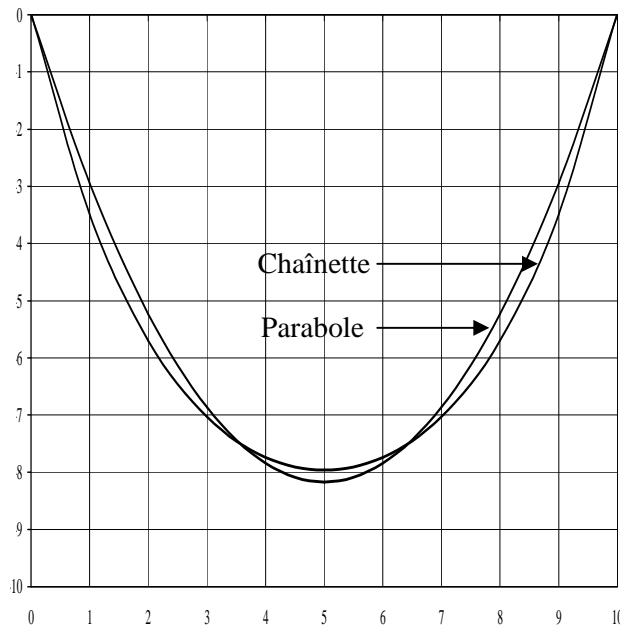
Ceci permet de déterminer l'équation du câble :

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{R_H}{q} \left(\operatorname{coshyp}\left(\frac{qL}{2R_H}\right) - \operatorname{coshyp}\left(\frac{q}{R_H}\left(\frac{L}{2} - x\right)\right) \right) \\ &= 2,296(4,467 - \operatorname{coshyp}(0,436(5-x))) \end{aligned}$$

Et la flèche H vaut $y(x = L/2 = 5 \text{ [m]})$, soit $H = 7,96 \text{ [m]}$

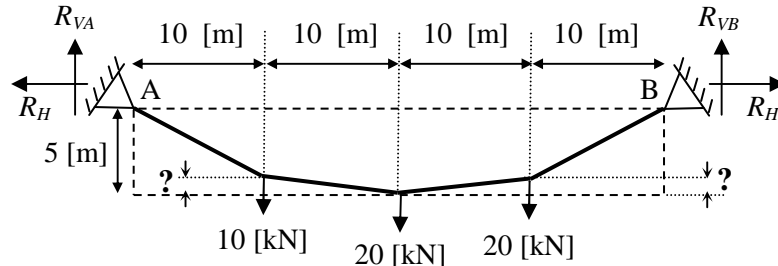
Effort maximal dans le câble : $N_{\max} = \sqrt{R_H^2 + R_V^2} = 20,52 \text{ [N]}$

La figure ci-dessous compare les deux géométries et montre que la chaînette est plus "ample" et plus abrupte aux appuis :



Exemple 5 : (CAS 4, conception)

Un câble que l'on supposera dans un premier temps inextensible est chargé par des efforts verticaux répartis tous les 10 mètres.



La flèche H est imposée et vaut 5 mètres. On désire calculer les réactions d'appui ainsi que la géométrie exacte du câble. On propose aussi d'évaluer la validité de l'hypothèse d'inextensibilité.

→ Calcul des réactions d'appui et de l'effort maximal dans le câble

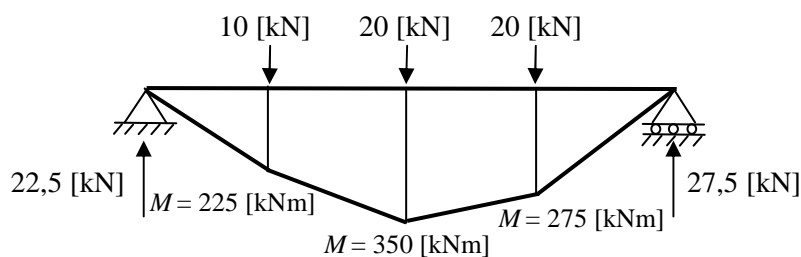
Équilibre vertical : $R_{VA} + R_{VB} = 50$

Équilibre des moments par rapport à B : $40R_{VA} = 10 \cdot 30 + 20 \cdot 20 + 20 \cdot 10$

Ces deux équations permettent de calculer $R_{VA} = 22,5$ [kN] et $R_{VB} = 27,5$ [kN].

Pour connaître R_{H} , il faut faire l'équilibre de rotation du morceau de gauche du câble par rapport au point le plus bas, dont la position est encore inconnue.

Selon le théorème d'analogie énoncé au §2.7, la déformée du câble est l'image du diagramme des moments fléchissants de la poutre suivante :



Ce diagramme des moments permet de connaître le point bas du câble. Dans ce cas, il correspond à la mi-portée (mais ce n'est pas toujours le cas !). On peut alors établir la troisième équation :

$$20R_{VA} = 5R_H + 10 * 10 \quad \text{et on obtient } R_H = 70,0 \text{ [kN]}$$

L'effort maximal dans le câble se produit dans le tronçon le plus incliné, soit dans le tronçon aboutissant à l'appui droit. On a :

$$N_{\max} = \sqrt{R_H^2 + R_{VB}^2} = 75,208 \text{ [kN]}$$

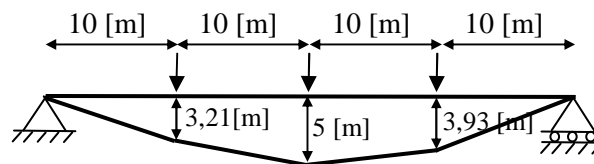
→ Géométrie exacte du câble

La réaction d'appui horizontale étant connue, la position du câble au point d'application des forces se calcule grâce au théorème d'analogie avec la poutre :

$$\text{Flèche en } x = 10 \text{ [m]} = M(x=10)/R_H = 225/70 = 3,214 \text{ [m]}$$

$$\text{Flèche en } x = 20 \text{ [m]} = M(x=20)/R_H = 350/70 = 5,000 \text{ [m]}$$

$$\text{Flèche en } x = 30 \text{ [m]} = M(x=30)/R_H = 275/70 = 3,929 \text{ [m]}$$



→ Prise en compte de l'extensibilité du câble

Si le câble est dimensionné pour travailler à une contrainte maximale de 1000 [MPa], sa section A est calculée à partir de l'effort maximal de 75,2 [kN] et vaut 75 [mm²].

Par ailleurs, l'effort dans chaque tronçon d'inclinaison θ avec l'horizontale est désormais connu et vaut : $N = R_H / \cos \theta = 70 / \cos \theta$.

Les allongements respectifs des différents tronçons sont les suivants (on prend $E_c = 170.000$ [MPa]) :

$$\text{Tronçon 1 : } N = 73,518 \text{ [kN], longueur } 10,503 \text{ [m] : } NL/(EA) = 61 \text{ [mm]}$$

$$\text{Tronçon 2 : } N = 71,108 \text{ [kN], longueur } 10,158 \text{ [m] : } NL/(EA) = 57 \text{ [mm]}$$

$$\text{Tronçon 3 : } N = 70,400 \text{ [kN], longueur } 10,057 \text{ [m] : } NL/(EA) = 56 \text{ [mm]}$$

$$\text{Tronçon 4 : } N = 75,209 \text{ [kN], longueur } 10,744 \text{ [m] : } NL/(EA) = 64 \text{ [mm]}$$

L'allongement total du câble est donc de 238 [mm].

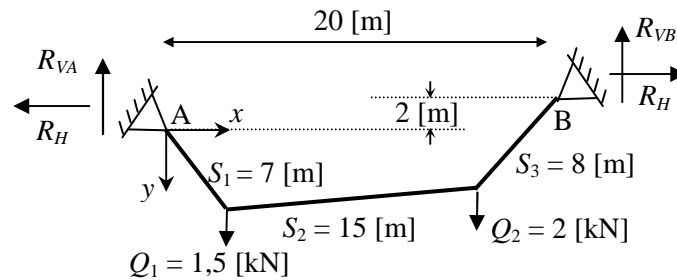
Cet allongement est responsable d'une augmentation de flèche de l'ordre de 50 [cm], soit 10% de la flèche de 5 mètres imposée au départ.

Pour tenir compte de cet allongement et pour que la flèche totale H ne dépasse pas 5 mètres après chargement, il faudra donc mettre en place un câble dont la longueur à la pose vaut :

$$(10,503+10,158+10,057+10,744) - 0,238 = 41,224 \text{ [m]}.$$

Exemple 6 : (CAS 4, approche pragmatique)

Un câble que l'on supposera inextensible est chargé par deux efforts Q_1 et Q_2 grands par rapport au poids propre du câble. Les charges Q_1 et Q_2 ont été fixées au câble avant mise en place et les distances S_1 , S_2 et S_3 sont donc connues.



On propose de calculer les réactions d'appui R_{VA} , R_{VB} , R_H ainsi que la géométrie du câble.

→ Équilibre global de la structure

Si θ_1 , θ_2 , θ_3 sont les angles respectifs de chaque tronçon de câble avec l'horizontale, on a :

$$\begin{cases} R_{VA} + R_{VB} = Q_1 + Q_2 & (\text{équilibre vertical}) \\ 20R_{VB} = 2R_H + Q_1(S_1 \cos \theta_1) + Q_2(20 - S_3 \cos \theta_3) & (\text{couple par rapport à A}) \\ S_1 \cos \theta_1 + S_2 \cos \theta_2 + S_3 \cos \theta_3 = 20 & (\text{compatibilité géométrique}) \end{cases}$$

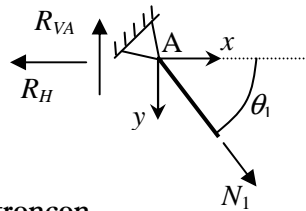
Les inconnues du problème étant au nombre de neuf (R_{VA} , R_{VB} , R_H , θ_1 , θ_2 , θ_3 , N_1 , N_2 , N_3), il faut établir les six équations supplémentaires résultant de l'équilibre des différents tronçons de câble.

⇒ Équilibre partiel de la structure

• Équilibre du premier tronçon

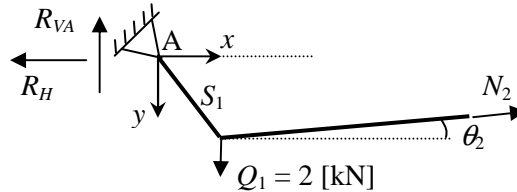
Les projections horizontales et verticales de l'effort N_1 étant respectivement égales aux réactions d'appui horizontales R_H et verticales R_{VA} on trouve :

$$\begin{cases} N_1 \cos \theta_1 = R_H \\ N_1 \sin \theta_1 = R_{VA} \end{cases}$$



• Équilibre du deuxième tronçon

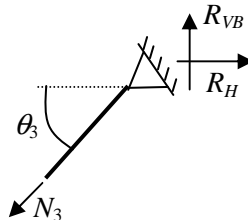
$$\begin{cases} N_2 \cos \theta_2 = R_H \\ N_2 \sin \theta_2 + R_{VA} = Q_1 \end{cases}$$



• Équilibre du troisième tronçon

Pour ce dernier tronçon, il semble plus judicieux d'isoler la partie droite de la structure :

$$\begin{cases} N_3 \cos \theta_3 = R_H \\ N_3 \sin \theta_3 = R_{VB} \end{cases}$$



⇒ Résolution du système d'inconnues

Le système comporte 9 équations non linéaires dans lequel les inconnues sont R_H , R_{VA} , R_{VB} , N_1 , N_2 , N_3 , θ_1 , θ_2 et θ_3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{VA} + R_{VB} = 3,5 \\ 20 R_{VB} = 2R_H + 10,5 \cos \theta_1 + 40 - 16 \cos \theta_3 \\ 7 \cos \theta_1 + 15 \cos \theta_2 + 8 \cos \theta_3 = 20 \\ N_1 \cos \theta_1 = R_H \\ N_1 \sin \theta_1 = R_{VA} \\ N_2 \cos \theta_2 = R_H \\ N_2 \sin \theta_2 + R_{VA} = 1,5 \\ N_3 \cos \theta_3 = R_H \\ N_3 \sin \theta_3 = R_{VB} \end{array} \right.$$

Un tel système n'est évidemment pas facile à résoudre manuellement et on imaginera sans mal la complexité des systèmes d'équations relatifs à des structures à câbles soumises à un grand nombre de charges extérieures. On obtient :

$$\begin{array}{lll} R_{VA} = 1,5 \text{ [kN]} & \theta_1 = 67,2^\circ & N_1 = 1,6 \text{ [kN]} \\ R_{VB} = 2,0 \text{ [kN]} & \theta_2 = 3,0^\circ & N_2 = 0,6 \text{ [kN]} \\ R_H = 0,6 \text{ [kN]} & \theta_3 = 73,2^\circ & N_3 = 2,1 \text{ [kN]} \end{array}$$

La figure ci-dessous représente, à l'échelle, le câble mis en place :

