

← **Energétique** → éoliennes sous – marines (courant) & Marines (Vent)

Chapitre 2 : diffraction – radiation par un pieux **énergétique**

Réfraction , diffraction et réflexion des ondes

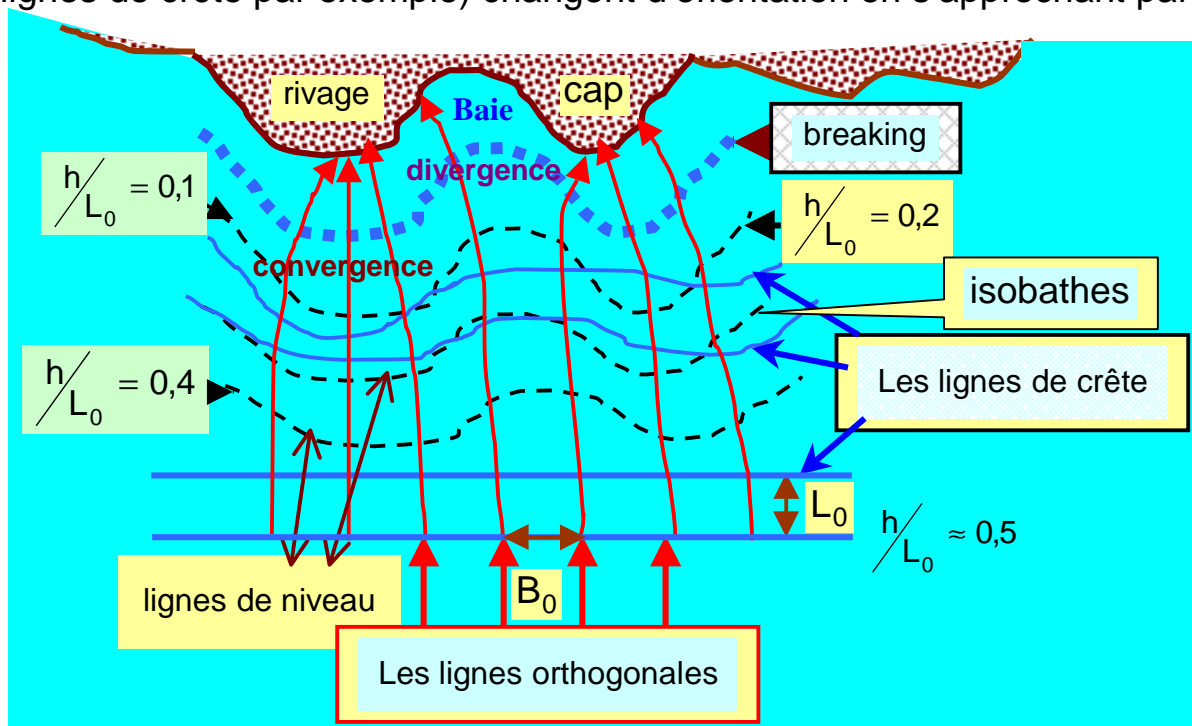
Résonance portuaire & les théories des Caustiques et Tsunamis

1) Introduction :

Quand un train d'ondes se propage vers un rivage (une côte) les lignes de crêtes (c- à - d les lignes d'amplitude maximale d'égale phase) sont souvent modifiées par les phénomènes de réfraction, diffraction et / ou réflexion. On parlera de la production d'énergie électrique par la houle.

- **La réfraction :**

Elle a lieu principalement en eau peu profonde où l'onde sens la bathymétrie c'est – à – dire la célérité de l'onde varie avec la profondeur d'eau : la vitesse de phase diminue quand la profondeur est moindre. Il en résulte que les fronts d'onde (les lignes d'égale phase comme les lignes de crête par exemple) changent d'orientation en s'approchant par

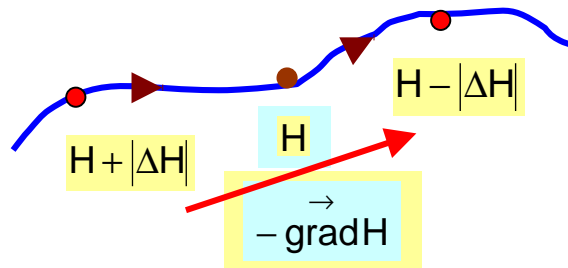


conséquence des lignes d'égale profondeur [**isobathes**].

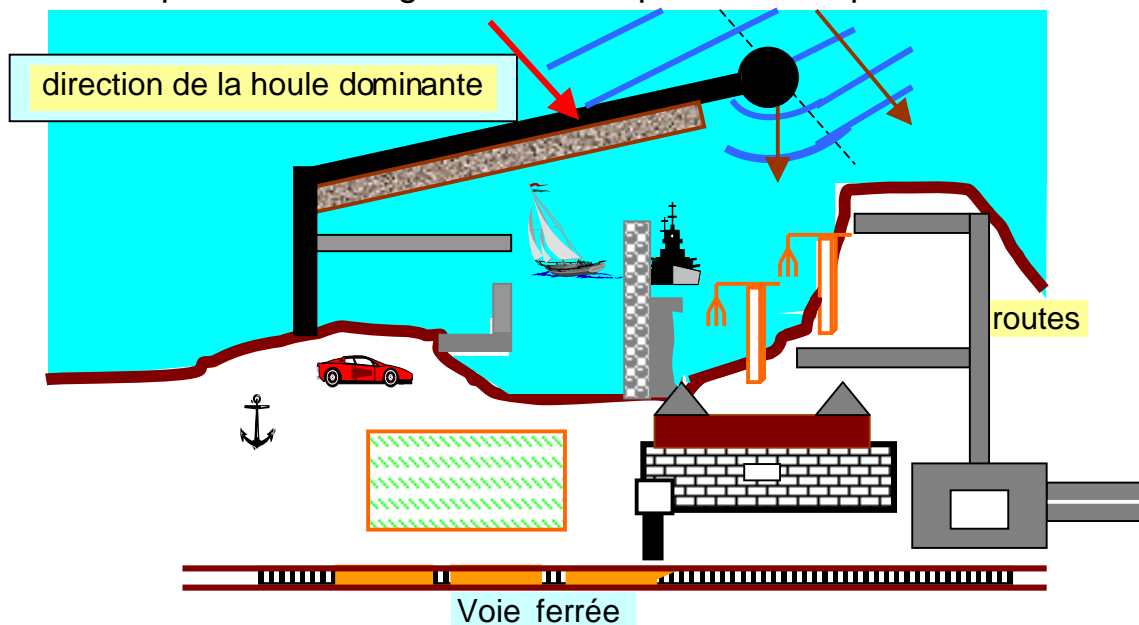
Les lignes orthogonales peuvent converger où diverger selon la bathymétrie (vers un cap on a en général une convergence des orthogonales : focalisation de l'énergie comme une lentille convergente et l'inverse pour une baie qui se comporte par analogie comme une lentille divergente) il en résulte une diminution ou une augmentation de l'amplitude de l'onde le long d'une même ligne de crête (pour le voir il suffit d'écrire la conservation de l'énergie entre 2 orthogonales consécutives).

- **La diffraction :**

La diffraction se produit quand l'amplitude d'une onde est plus grande en point le long d'une ligne de crête qu'en un point adjacent, causant ainsi un transfert d'énergie transversal le long de cette ligne dans la direction où l'amplitude est décroissante (sens opposé du gradient de l'amplitude) et la nature cherche ainsi à rendre l'amplitude uniforme le long de cette ligne de crête :



Cette observation est importante car elle explique clairement comment le transfert d'énergie et sa propagation se fait vers les zones abritées par une brise lame (un abri) par exemple dont l'objet est d'interrompre l'onde afin d'avoir une agitation minimale pour l'accostage des navires. Mais une contradiction d'ordre physique et une problématique en résulte : une zone de moindre agitation est un piège à sédiments au quel il faut associer la courantologie qui en résulte à l'échelle de la houle ! ?. Une mauvaise conception d'un port dans le choix du site et la conception de sa géométrie induisent des problématiques de sédimentologie (les dragages incessants valent chère) et des résonances portuaires qui causent des problèmes de gestion et d'exploitation du port.



Les phénomènes de réfraction, diffraction et réflexion déterminent la distribution de l'amplitude d'une onde et l'orientation des lignes de crête en un voisinage donné. Le spectre incident sur un site donné en présence ou non d'un ouvrage maritime est ainsi modifié sans oublier de

tenir compte dans les calculs des effets non – linéaires (advection, frottement ...Etc.) qui excitent des harmonique qui modifient la courantologie et l'agitation dans le site d'intérêt : une étude sérieuse et correcte de ces mécanismes d'un point de vue hydrodynamique et énergétique est de première importance pour : choisir le site, évaluer la sédimentologie, la pollution qui peut en résulter : les études d'impacts présentent dans ce cadre une priorité internationale.

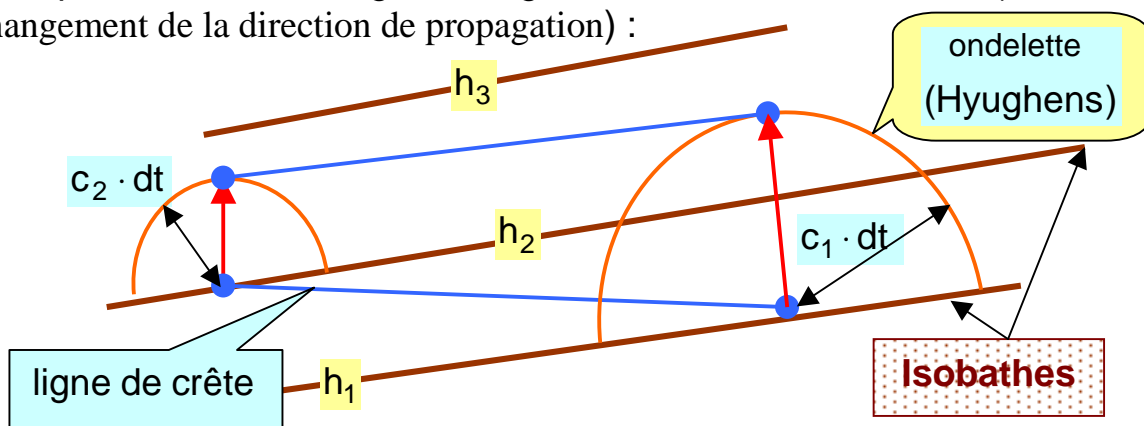
On signale que dans la réalité physique que ces phénomènes se produisent simultanément . Dans la suite on va étudier séparément chaque phénomène sur des cas simples pour illustrer la physique associée et ultérieurement on proposera des modelés qui tiennent compte de ces 3 mécanismes.

2) La Réfraction :

Quand une onde sens la présente du fond c'est – à – dire que la célérité

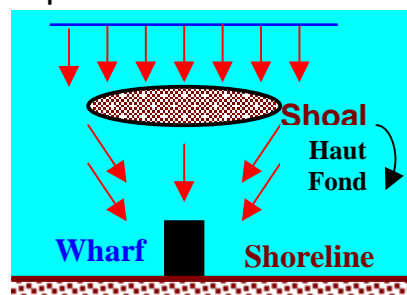
$$c = \frac{gT}{2\pi} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \xrightarrow{\text{si } \left(\frac{h}{L}\right) < 0,05 \text{ alors}} c \approx \sqrt{gh} \quad (1)$$

n'est pas constante le long d'une ligne de crête elle se réfracte (c'est un changement de la direction de propagation) :



On générale on se donne les lignes d'égale profondeur relative à L_0 pour déterminer la célérité de l'onde par :

$$\frac{h}{L} \operatorname{th}\left(2\pi \frac{h}{L}\right) = \frac{h}{L_0} \rightarrow c = \frac{L}{T} \quad (2)$$



On observe que l'effet de la réfraction a tendance à rendre les lignes de crête parallèles aux lignes isobathymétriques.

Si on construit des lignes orthogonales aux lignes de crêtes également espacées de B_0 au large (c'est – à – dire en eau profonde) et prolongées jusqu'au rivage, en étant bien entendu toujours perpendiculaire aux lignes de crête, on peut calculer la répartition de l'énergie sur le site et

en déduire en suite la distribution de l'amplitude le long des lignes de crête. Là où les lignes orthogonales convergent augmente et vis versa. La convergence et la divergence des orthogonales induisent une variation des amplitudes conformément à :

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{L_0}{2nL}} \cdot \sqrt{\frac{B_0}{B}} = \frac{H}{H'_0} \cdot \sqrt{\frac{B_0}{B}} \quad (3)$$

HH_0^{-1} Le **coefficient de Shoaling** (on dit aussi de **gonflement** mieux encore **le coefficient de profondeur**) qui ne dépend que de la profondeur relative hL^{-1} (ou de hL_0^{-1}).

Noter que puisque la célérité dépend de la période T de l'onde il en résulte que les ondes de différentes périodes se réfractent différemment en se rapprochant de la ligne de côte d'où résultent sur un site réel une agitation festonnée. Une étude de réfraction doit donc se faire pour plusieurs périodes existantes sur le site pour les différentes directions associées pour élaborer des diagrammes qui nous permettront de déterminer la direction la plus critique et la période associée pour concevoir correctement l'ouvrage projeté. De ces diagrammes on peut

facilement calculer le coefficient de réfraction par : $K_R = \sqrt{\frac{B_0}{B}}$ (4)

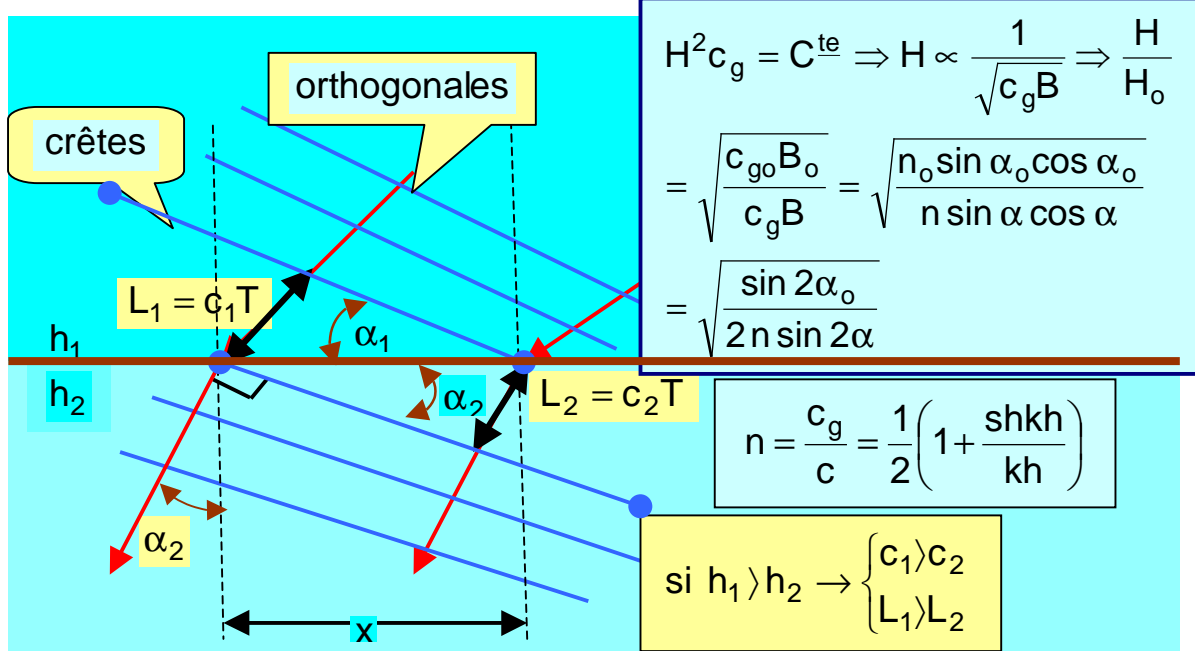
En se donnant l'amplitude au large (en eau profonde) on peut alors calculer l'amplitude la plus critique au site ainsi que la direction et la période qui lui sont associées pour dimensionner l'ouvrage projeté.

2 – 1) Construction des diagrammes de réfraction :

La 1^{ère} Méthode développée pour construire les diagrammes de réfraction est la **méthode des lignes de crête** (Johnson, M. P. O'Brien et J. D. Issacs 1948). On part d'une ligne de crête en eau profonde, un point sur la ligne de crête avance à la célérité locale normalement à la ligne de crête nouveau point est ainsi trouvé (la nouvelle ligne de crête est l'enveloppe de ces ondelettes) et de proche en proche on construit le diagramme de réfraction. Après le tracé du diagramme de réfraction des lignes de crête pour la période choisit on construit les orthogonales également espacées de B_0 arbitraire au large.

La 2^{ème} Méthode graphique pour construire les diagrammes de réfraction est la **méthode des orthogonales** (Arthur et Arthur. 1952) est basée sur la loi de Snell et Descart. Que nous allons démontrer :

On prend le cas d'une onde monochromatique qui traverse une marche (discontinuité de la profondeur) on va ignorer la réflexion de l'onde par la discontinuité qui passe instantanément de h_1 à h_2 il en résulte une discontinuité de la célérité c_1 à c_2 et la longueur d'onde de L_1 à L_2 :

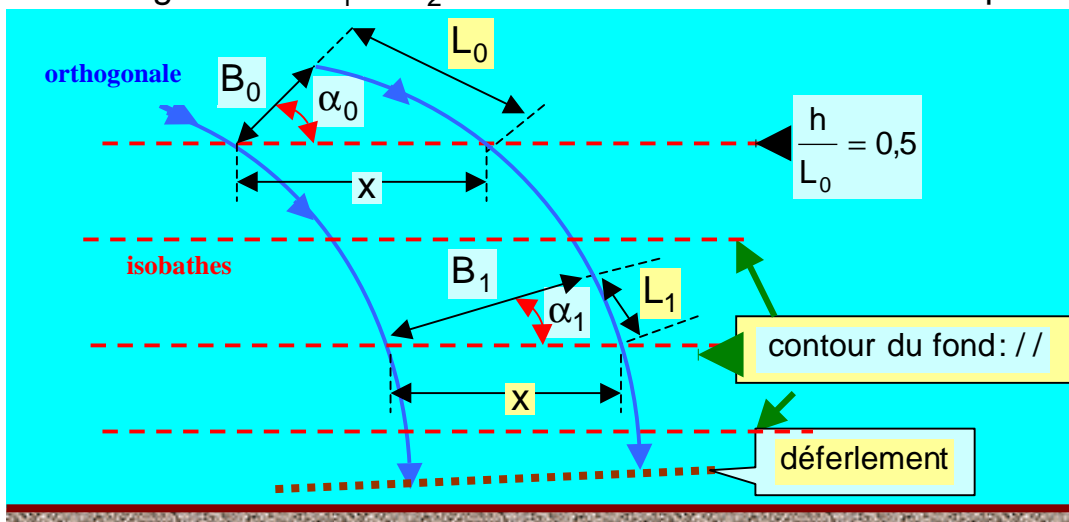


Pour un espacement x entre les orthogonales et pendant un intervalle de temps égal à une période T par exemple, on a :

$$\left. \begin{matrix} \sin \alpha_1 = c_1 \cdot T/x \\ \sin \alpha_2 = c_2 \cdot T/x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{L_1}{L_2} \quad (5) \text{ c'est la loi de Snell \& Descartes. En utilisant}$$

cette loi à la réfraction d'une onde par une bathymétrie qui varie graduellement (c'est – à – dire par exemple uniforme) les angles α_1 et α_2 sont alors ceux entre les **lignes de crête** et les **isobathes** (c'est –à – dire les contours d'égal profondeur d'eau) aux différents points le long d'une orthogonale et c_1 & c_2 sont ainsi les célérités en ces 2 points :



Quand des ondes se propagent sur un contour du fond qui est essentiellement droit et parallèle comme indiquer sur la figure au –

dessus on a d'après la loi de Snell :

$$\frac{\sin \alpha_0}{L_0} = \frac{\sin \alpha_1}{L_1} = x \quad (6)$$

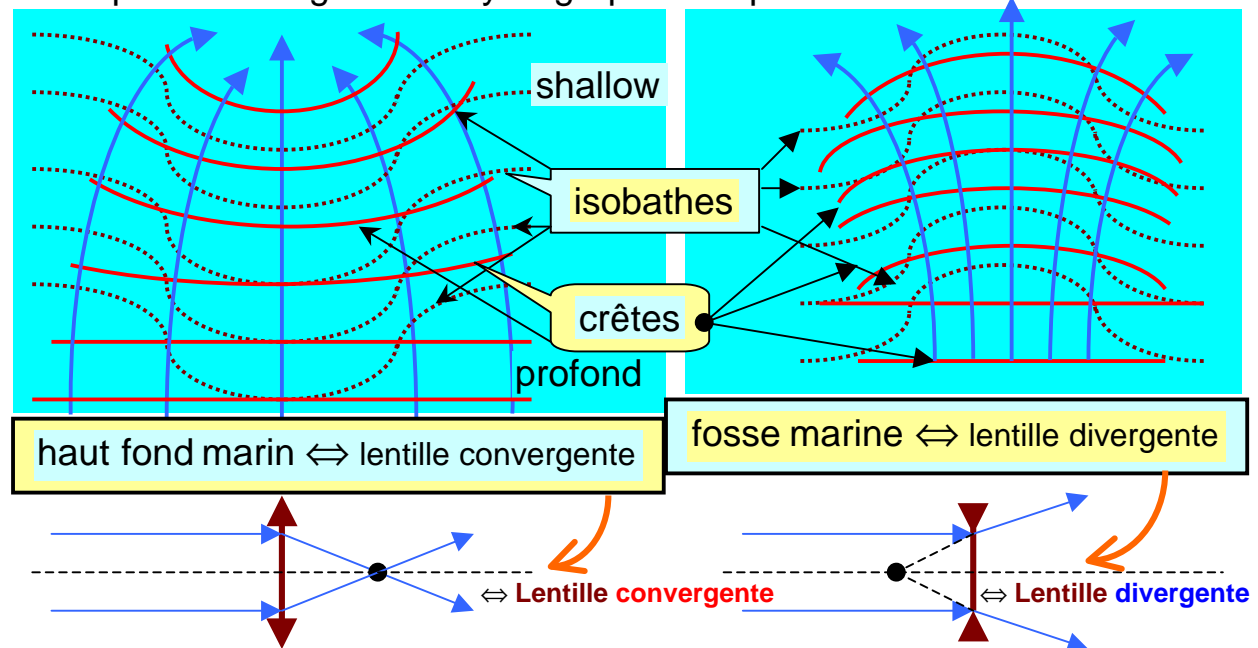
Si nous choisissons B_0 et B_1 comme indiqué sur la figure on a alors :

$$\frac{B_0}{\cos \alpha_0} = x = \frac{B_1}{\cos \alpha_1} . \text{ Et comme par définition le coefficient de}$$

réfraction est donné par $K_R = \sqrt{\frac{B_0}{B}} \Rightarrow K_R = \sqrt{\cos \alpha_0 / \cos \alpha}$ (7) avec

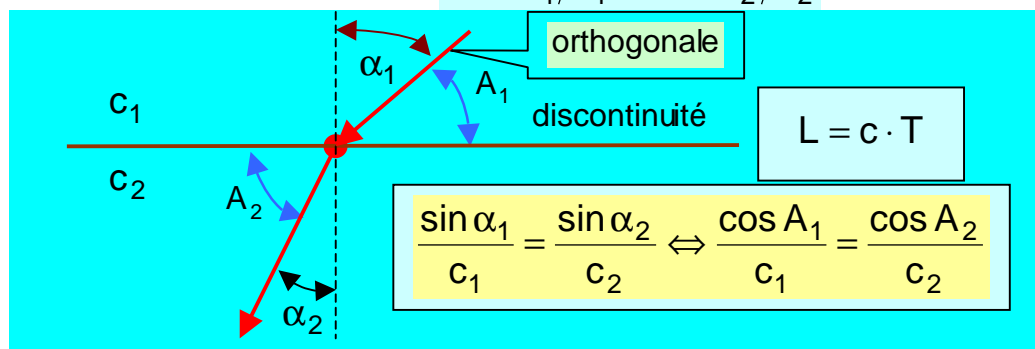
$$\alpha_1 = \text{Arc sin}(c_1/c_0 \sin \alpha_0)$$

ces équations nous permettent s'estimer l'effet de la réfraction d'une houle pour un rivage dont l'hydrographie est proche de l'uniforme.



N.B. : réfraction de la houle et plan de vague

Si on désigne par A l'angle que la direction de propagation (orthogonale ou rayon de houle) avec la ligne de discontinuité de la célérité c , on peut écrire loi de **Snell & Descartes** : $\cos A_1/c_1 = \cos A_2/c_2$



Les lignes de niveau sont en général sont compliqués, pour trouver dans ce cas la forme des lignes de crête, il est conseillé d'utiliser : la **construction** de **Huyghens** : on en déduit alors le "**plan de vague**" et conservation de la puissance nous permet de calculer les amplitudes. Quand la réfraction est faible on conseille d'utiliser des Δt faible c'est – à – dire de serrer les lignes de crête pour avoir une meilleur précision.

J.W. Johnson, M.P. O'Brien et J.D. Issacs (1948) proposent pour tracer les orthogonales de différencier l'équation de Descartes : $\alpha + A = 90^\circ$

$$\cos A / c = C^{\text{te}} \Rightarrow \text{tg } A \cdot dA = -dc/c \quad (\text{voir vers la fin})$$

Remarque :

Actuellement vu les moyens (ordinateurs) et les méthodes numériques il est très facile d'élaborer un code de calcul basé sur les équations régissant la réfraction, diffraction voir même la diffraction – réfraction simultanées. On parlera ultérieurement de ces méthodologies.

N.B. : Si on écrit l'équation de la surface libre sous la forme : $\eta(x, y, t) = a(x, y) \cdot \cos\{\omega t - \Psi(x, y)\}$. Le vecteur d'onde local est donc :

$\vec{k}(x, y) = \vec{\nabla}\Psi(x, y)$ Alors que le nombre d'onde local est donné par :

$k(x, y) = \|\vec{\nabla}\Psi(x, y)\|$ c'est l'équation eiconale (en optique géométrique) ; c'est une équation différentielle de premier ordre non – linéaire ; où k est la racine réelle de $\omega^2 = gk(x, y) \cdot th[k(x, y)h(x, y)]$. L'équation différentielle

de l'orthogonale (le rayon) est donnée par : $\vec{\text{rot}} \vec{k}(x, y) = \vec{0}$ (8)

une fois les rayons déterminés, on calcule l'amplitude par l'équation de conservation d'énergie : $\vec{\nabla}\vec{P} + \varepsilon_D = 0$ où ε_D est la dissipation

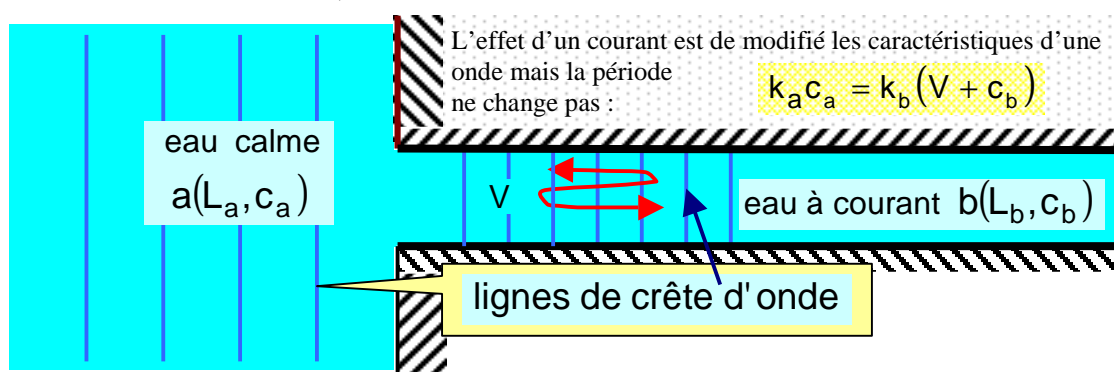
d'énergie par unité de surface et par unité de temps et $\vec{P} = 2^{-1} \rho g a^2 c_g \vec{e}$

Dans la couche limite turbulente le taux de dissipation d'énergie par m^2

est : $\varepsilon_D = C_f \rho \|\vec{\nabla}\Psi\|_{\text{fond}}^3 = 4/3\pi C_f (\omega H/2shkh)^3$ où $C_f \sim 10^{-2}$.

2 – 2) Réfraction par les courants :

Quand une onde passe d'une aire sans courant à une autre où existe un transport de masse (un courant) on observe que la période T reste constante alors que la longueur d'onde L , la célérité c et l'amplitude de l'onde H changent. On observe de même que l'onde se réfracte si les lignes orthogonales ne sont pas parallèles au courant. Ceci est influent, par exemple, à l'embouchure d'une rivière dans une mer (estuaire), dans une zone à forte marée, dans une zone où le vent crée un courant... Etc.



L'onde se propage de l'aire (a) où l'eau est au repos (calme) vers un canal (b) où la vitesse du courant est V normale aux lignes de crête incidentes. Puisqu'il ne peut pas y avoir accumulation ou disparition d'ondes entre les 2 aires (a) et (b) (on suppose qu'il ne se produit pas de déferlement) alors le même nombre d'onde doit donc passer de l'aire (a) dans l'aire (b) pour le même intervalle de temps donné (prenons une période) ; mais comme la période ne change pas entre les 2 aires. Ainsi si on désigne par c_a la célérité absolue (sans courant) et c_b la célérité de celle – ci relative à la vitesse du courant V :

$$\left. \begin{array}{l} T_{\text{avec courant}} = T = T_{\text{sans courant}} \\ \text{célérité} = c \equiv \frac{\text{Longueur d'onde}}{T_{\text{période}}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{L_b}{V + c_b} \right) = T = \left(\frac{L_a}{c_a} \right)$$

Il en résulte donc que : $\frac{L_b}{L_a} = \frac{V + c_b}{c_a}$ (9) ou $k_a c_a = k_b (V + c_b)$

Pour fermer le problème il faut se donner la relation entre la longueur d'onde L et la célérité c . Afin de simplifier les calculs et mettre en évidence l'effet du courant on traite le cas d'eau profonde ; dans ce cas

$$\text{on a : } c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \Leftrightarrow c^2 = \frac{gL}{2\pi} \Rightarrow \frac{L_b}{L_a} = \frac{c_b^2}{c_a^2} \text{ d'où } \frac{c_b}{c_a} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{4V}{c_a}} \right\} \quad (10)$$

$$\text{En effet } \frac{V}{c_a} + \frac{c_b}{c_a} = \frac{L_b}{L_a} = \frac{c_b^2}{c_a^2} \Rightarrow \left(\frac{c_b}{c_a} \right)^2 - \frac{c_b}{c_a} - \frac{V}{c_a} = 0 \text{ d'où le résultat.}$$

On voit que quand le courant s'oppose à l'onde on a $\frac{V}{c_a} < 0$ alors on en

déduit que $c_b < c_a$ & $L_b < L_a$ (soit une diminution de la célérité et de la longueur d'onde par le courant). Si on s'intéresse au calcul de l'amplitude de l'onde il suffit d'écrire la conservation de la puissance;

$$\text{soit : } \frac{H_1}{H_2} = \frac{\sqrt{n_2 L_2} \cdot \sqrt{B_2}}{\sqrt{n_1 L_1} \cdot \sqrt{B_1}}$$

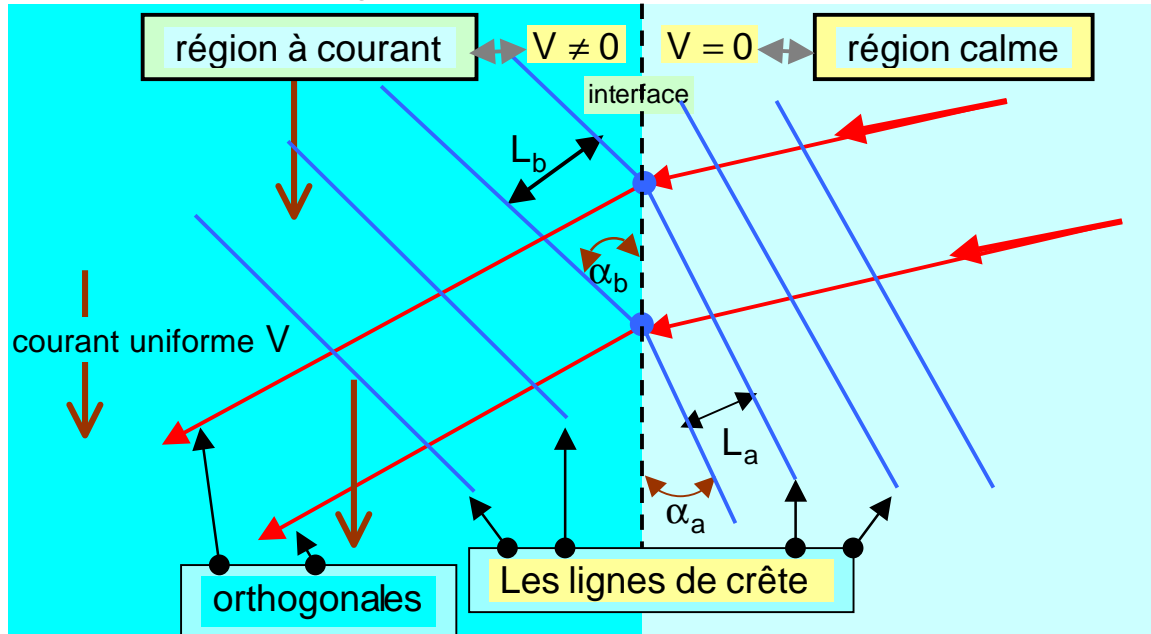
dans ce cas (c à d le cas où courant s'oppose à l'onde en eau profonde) l'amplitude doit donc augmenter (il peut en résulté un déferlement prématuré si cette amplification est suffisante) :



C'est l'inverse qui se produit dans le cas où le courant et l'onde sont dans le même sens c'est – à – dire on a une augmentation de la célérité et de la longueur d'onde par le courant dont résulte une diminution de l'amplitude de l'onde dans la zone à courant.

Remarque :

Dans le cas d'une eau de profondeur quelconque il faut recourir à la relation de dispersion générale (linéaire en profondeur quelconque) :



$$c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{L}} \Rightarrow L_b \operatorname{th} \left(\frac{2\pi h}{L_b} \right) / L_a \operatorname{th} \left(\frac{2\pi h}{L_a} \right) = \frac{c_b^2}{c_a^2} \text{ avec } \frac{L_b}{L_a} = \frac{V + c_b}{c_a}$$

Le calcul dans ce cas devient implicite.

Maintenant voyons comment se réfracte d'onde par le courant :

La figure au – dessus présente une onde dont l'incidence sur la zone où existe un courant n'est pas orthogonale (cas traité avant) il en résulte une réfraction de celle – ci par le courant conformément à la loi de Snell

on a : $\frac{L_a}{L_b} = \frac{\sin \alpha_a}{\sin \alpha_b}$. Comme la ligne de crête est continue en traversant

l'interface de séparation des 2 zones la vitesse tangentielle est continue

alors : $V + \frac{c_b}{\sin \alpha_b} = \frac{c_a}{\sin \alpha_a}$ ceci résulte du fait que $\vec{c}_{absolue} = \vec{c}_{relative} + \vec{u}$

que l'on projette sur la direction de propagation . Pour résoudre analytiquement le problème supposons que l'onde se propage en eau profonde on alors :

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_b}{L_a} &= \frac{c_b^2}{c_a^2} \text{ eau profonde} \\ \frac{L_b}{L_a} &= \frac{\sin \alpha_a}{\sin \alpha_b} \text{ loi de Snell} \\ V + \frac{c_b}{\sin \alpha_b} &= \frac{c_a}{\sin \alpha_a} \text{ continuité de la vitesse} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{L_a}{L_b} = \left(1 - \frac{V}{c_a} \sin \alpha_a \right)^2 \quad (11)$$

En effet il suffit de remarquer qu'on peut écrire :

$$V + \frac{c_b}{\sin \alpha_b} = \frac{c_a}{\sin \alpha_a} \Rightarrow \frac{c_b}{c_a} = \left(\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_a} \right) \left(1 - \frac{V \sin \alpha_a}{c_a} \right)$$

et comme on a en eau profonde :

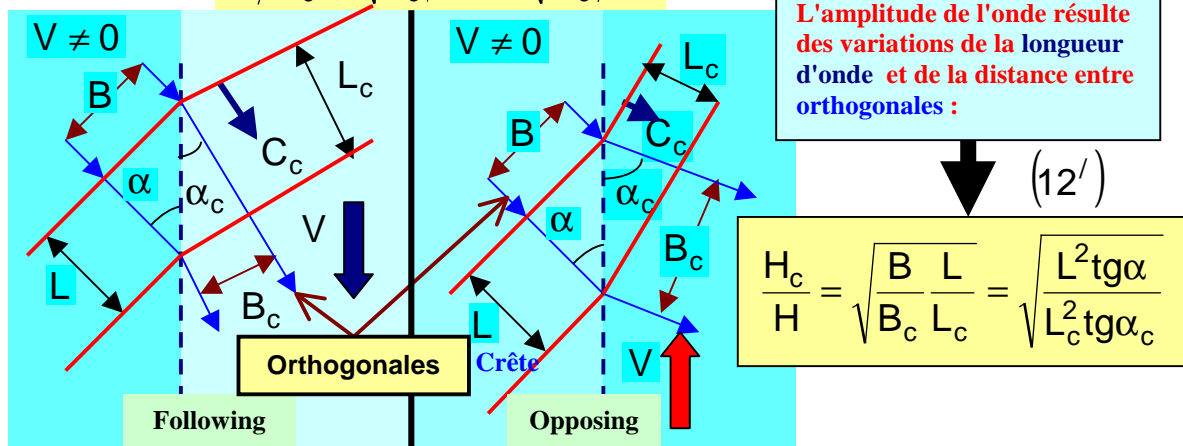
$$\frac{L_b}{L_a} = \left(\frac{c_b}{c_a} \right)^2 = \left(\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_a} \right)^2 \left(1 - \frac{V \sin \alpha_a}{c_a} \right)^2 = \left(\frac{L_b}{L_a} \right)^2 \left(1 - \frac{V \sin \alpha_a}{c_a} \right)^2 \Rightarrow \text{cqfd}$$

En résumé un courant qui s'oppose à la propagation d'une de gravité peut induire une augmentation de l'amplitude de l'onde de 2 manières et donc un déferlement prématuré :

- La première un rapprochement des orthogonales par réfraction.
- La deuxième en diminuant la longueur d'onde.

La conservation de la puissance nous permet de calculer l'amplitude de l'onde; soit :

$$H/H_0 = \sqrt{L_0/2nL} \sqrt{B_0/B} \quad (12)$$



N.B. : La théorie linéaire d'onde peut être appliquée dans un référentiel qui se **déplace** à la **vitesse** du **courant** (Jonsson et al. 1970 & Jonsson 78). Dans ce système de coordonnées la longueur d'onde reste constante mais la période de l'onde change : plus grande pour une onde et un courant dans le même sens $V > 0$ et plus petite dans un courant qui s'oppose à la propagation de l'onde $V < 0$. L'expression générale qui donne la période dans le repère relative est :

$$T_R = \frac{T}{1 - \frac{(V \cdot T \cos \phi)}{L'}} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} V : \text{vitesse moyenne sur la profondeur du courant} \\ \phi : \text{angle entre le courant et la direction d'onde;} \\ [\phi = 0 \text{ for following}] [\phi = 180^0 \text{ for opposing}] \\ L' : \text{longueur d'onde donnée par :} \\ \left(\frac{L'}{T} - V \cdot \cos \phi \right)^2 = \frac{gL'}{2\pi} \operatorname{th} \left(\frac{2\pi h}{L'} \right) \\ T : \text{période absolue de l'onde} \end{array} \right. \quad (13)$$

➔ Conservation de l'action de l'onde : **Wave action**

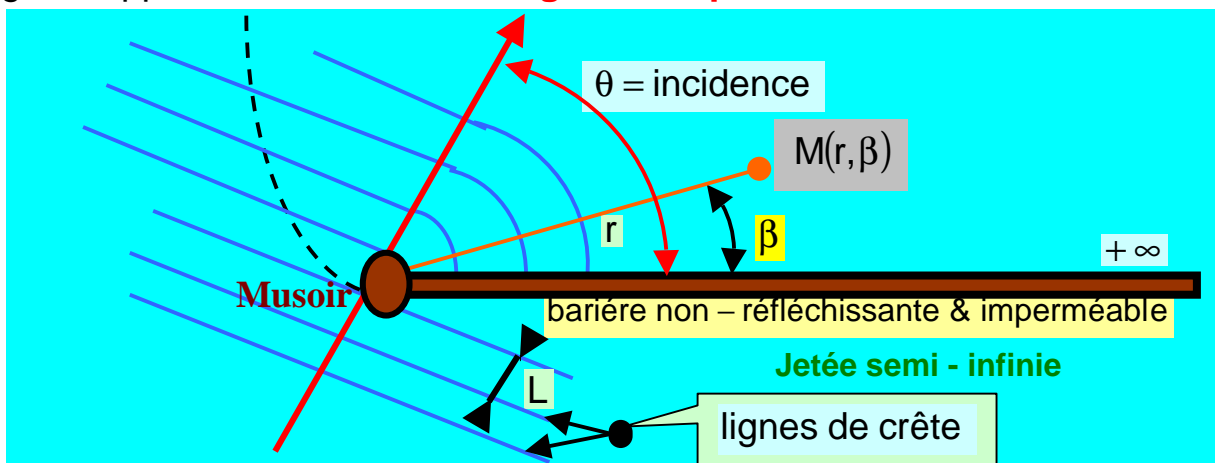
par définition l'action de l'onde est définie par $A = \frac{1}{8} \rho g \frac{H^2}{\omega_R}$ où $\omega_R = \frac{2\pi}{T_R}$

on démontre que l'action se conserve c'est - à - dire :

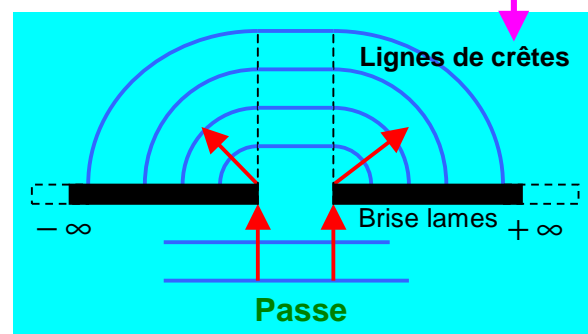
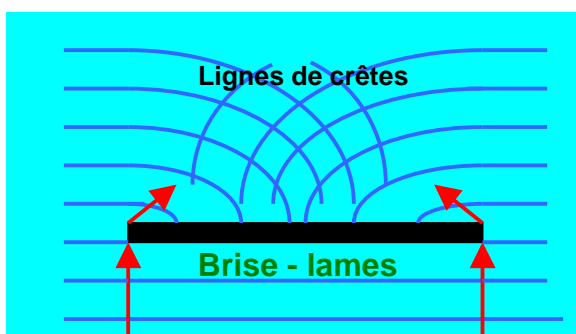
$$\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\nabla}_h [A(\vec{c}_{g,Relative} + \vec{V})] = 0 \quad \text{c - à - d} \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\nabla}_h [A \cdot \vec{c}_{g,absolue}] = 0$$

3) Diffraction :

Quand une onde aborde une structure imperméable (digue, épis ou mole) il y a un transfert d'énergie le long des lignes de crête dans la zone abritée par la brise lame. L'aire affecté par la diffraction est localisé derrière la ligne en pointillée (pour la brise - lame semi infinie) : cette ligne s'appelle **limite de l'ombre géométrique**.



Si la passe a une largeur supérieure à cinq fois la longueur d'onde **Johnson (1952)** a suggéré que la **diffraction** par les deux jetées sont indépendantes

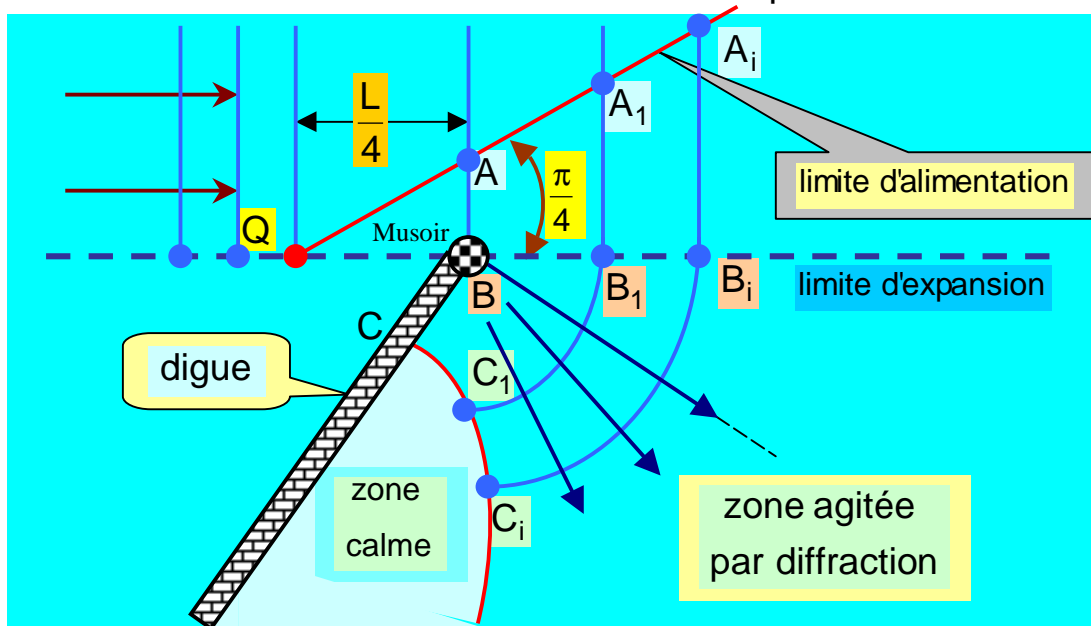


Le rapport de l'amplitude en un point M à l'amplitude de l'onde incidente est désigné par le coefficient de diffraction K_D qui est donné par :

$$K_D = f\left(\theta, \beta, \frac{r}{L}\right) \quad (14) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \theta \text{ l'angle d'incidence sur la brise lame} \\ (r, \beta) \text{ coordonnées polaires du point M} \\ L \text{ la longueur d'onde} \end{cases}$$

On signale qu'une modélisation des lignes de crête dans la zone abritée de la structure par des arcs de cercle concentriques autour du musoir constitue selon Iribarren une bonne approximation. Nous donnons cette méthode d'approximation en premier lieu sa simplicité analytique.

3 – 1) Diffraction de la houle : Méthode d'Iribarren (approximation)
Cette méthode est basée sur des observations expérimentales.



Selon Iribarren le musoir B est émetteur de crêtes circulaires centrés en B, le phénomène commence en un point Q situé à $(0,25 \cdot L)$ avant le musoir. La zone agitée est limitée par la spirale $(CC_1 \dots C_i \dots)$ tel que :

$$\overline{A_i B_i} = A_i B_i$$

Le long des arcs $A_i B_i C_i$ le creux varie sinusoïdalement depuis H_0 en A_i jusqu'à 0 en C_i . Au point B_i le creux vaut $\frac{H_0 \sqrt{2}}{2} = 0,71 \cdot H_0$.

La limite d'alimentation fait $\frac{\pi}{4}$ avec la limite d'expansion qui est le support de la direction de la houle incidente.

En un point M_i de $A_i B_i C_i$ le creux par diffraction est égal à :

$$H_D = \cos\left(\frac{\pi X}{2D}\right) \cdot H_0 = K_D \cdot H_0$$

où x est la distance $A_i M_i$, D la distance $A_i C_i$ et $K_D = \cos\left(\frac{\pi x}{2D}\right)$ (15) est

le coefficient de diffraction. Notons que pour :

$$\begin{cases} x = 0 (M_i = A_i) \xrightarrow{\text{on a}} K_D = 1 \\ x = D (M_i = C_i) \xrightarrow{\text{on a}} K_D = 0 \end{cases}$$

N.B. : A propos de l'amortissement et de la superposition

Si H_0 est l'amplitude crête – creux de l'onde incidente après un parcours

de durée t sa valeur devient : $H = H_0 e^{-\gamma t}$ par amortissement

Une formule pour calculer γ proposée par Estuary and Coastal Hydrodynamic pp509 – 510) est :

$$\frac{c}{c_0} = \frac{L}{L_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{k_0}\right)^2}} \text{ où } \begin{cases} c_0 \text{ célérité de l'onde incidente} \\ c \text{ célérité de l'onde à l'instant } t \\ k_0 = \frac{2\pi}{L_0} \\ \mu = \frac{\gamma}{c} \text{ en rad/m} \end{cases} \quad (16)$$

γ varie donc avec la profondeur, l'ordre de grandeur est $\gamma \sim 0,006 \text{ rad/s}$

Une estimation du creux résultant de la superposition en un point est :

$$H(M, t) \approx H_0 \cdot K_{\text{Diffraction}} \cdot K_{\text{Réflexion}} \cdot e^{-\gamma t} \quad (17)$$

ceci ne constitue qu'une approche; si on désire avoir des valeurs plus réelles et représentatives il faut recourir à une modélisation par la physique mathématique (par exemple écoulement à potentiel de vitesse 3D...Etc.) & numérique en représentant simultanément les phénomènes de déformation de l'onde en tenant compte des conditions aux limites (la

géométrie du bassin). Le coefficient de diffraction: $K_D = \frac{H_D}{H_I} = f\left(\theta, \beta, \frac{r}{L}\right)$

selon **Wiegel** (1962) est donné par les tableaux suivants :

$\theta = 15^\circ$	β												
rL^{-1}	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,5	0,49	0,79	0,83	0,90	0,97	1,01	1,03	1,02	1,01	0,99	0,99	1,00	1,00
1	0,38	0,74	0,83	0,95	1,04	1,04	0,99	0,98	1,01	1,01	1,00	1,00	1,00
2	0,21	0,68	0,86	1,05	1,03	0,97	1,02	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
5	0,13	0,63	0,99	1,04	1,03	1,02	0,99	0,99	1,00	1,01	1,00	1,00	1,00
10	0,35	0,58	1,10	1,05	0,98	0,99	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

$\theta = 30^\circ$	β												
rL^{-1}	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,5	0,61	0,63	0,63	0,76	0,87	0,97	1,03	1,05	1,03	1,01	0,99	0,95	1,00
1	0,50	0,53	0,63	0,78	0,95	1,06	1,05	0,98	0,98	1,01	1,01	0,97	1,00
2	0,40	0,44	0,59	0,84	1,07	1,03	0,96	1,02	0,98	1,01	0,99	0,95	1,00
5	0,27	0,32	0,55	1,00	1,04	1,04	1,02	0,99	0,99	1,00	1,01	0,97	1,00
10	0,20	0,21	0,54	1,12	1,06	0,97	0,99	1,01	1,00	1,00	1,00	0,98	1,00

$\theta = 45^\circ$	β												
rL^{-1}	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,5	0,49	0,50	0,55	0,63	0,73	0,85	0,96	1,04	1,06	1,04	1,00	0,99	1,00
1	0,38	0,40	0,47	0,59	0,76	0,95	1,07	1,06	0,98	0,97	1,01	1,01	1,00
2	0,29	0,31	0,39	0,56	0,83	1,08	1,04	0,96	1,03	0,98	1,01	1,00	1,00
5	0,18	0,20	0,29	0,54	1,01	1,04	1,05	1,03	1,00	0,99	1,01	1,00	1,00
10	0,13	0,1	0,22	0,53	1,13	1,07	0,96	0,98	1,02	0,99	1,00	1,00	1,00

$\theta = 60^\circ$	β												
rL^{-1}	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,5	0,40	0,41	0,45	0,52	0,60	0,72	0,85	1,13	1,04	1,06	1,03	1,01	1,00
1	0,31	0,32	0,36	0,44	0,57	0,75	0,96	1,08	1,06	0,98	0,98	1,01	1,00
2	0,22	0,23	0,28	0,37	0,55	0,83	1,08	1,04	0,96	1,03	0,98	1,01	1,00
5	0,14	0,15	0,18	0,28	0,53	1,01	1,04	1,05	1,03	0,99	0,99	1,00	1,00
10	0,10	0,11	0,13	0,21	0,52	1,14	1,07	0,96	0,98	1,01	1,00	1,00	1,00

$\theta = 75^\circ$	β												
rL^{-1}	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,5	0,34	0,35	0,38	0,45	0,50	0,59	0,71	0,85	0,97	1,04	1,05	1,02	1,00
1	0,25	0,26	0,29	0,34	0,43	0,56	0,75	0,95	1,02	1,06	0,98	0,98	1,00
2	0,18	0,19	0,22	0,26	0,36	0,54	0,83	1,09	1,04	0,96	1,03	0,99	1,00
5	0,12	0,12	0,13	0,17	0,27	0,52	0,01	1,04	1,05	1,03	0,99	0,99	1,00
10	0,08	0,08	0,10	0,13	0,20	0,52	1,14	1,07	0,96	0,98	1,01	1,00	1,00

$\theta = 90^\circ$	β												
rL^{-1}	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,5	0,31	0,31	0,33	0,36	0,41	0,49	0,59	0,71	0,85	0,96	1,03	1,03	1,00
1	0,22	0,23	0,24	0,28	0,33	0,42	0,56	0,75	0,96	1,07	1,05	0,99	1,00
2	0,16	0,16	0,18	0,20	0,26	0,35	0,54	0,69	1,08	1,04	0,95	1,02	1,00
5	0,10	0,10	0,11	0,13	0,16	0,27	0,53	1,01	1,04	1,05	1,02	0,99	1,00
10	0,07	0,07	0,08	0,09	0,13	0,20	0,52	1,14	1,07	0,96	0,99	1,01	1,00

$\theta = 105^\circ$	β												
rL^{-1}	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,5	0,28	0,28	0,29	0,32	0,35	0,41	0,49	0,59	0,72	0,85	0,97	1,01	1,00
1	0,20	0,20	0,24	0,23	0,27	0,33	0,42	0,56	0,75	0,95	1,06	1,04	1,00
2	0,14	0,14	0,13	0,17	0,20	0,25	0,35	0,54	0,83	1,06	1,03	0,97	1,00
5	0,09	0,09	0,10	0,11	0,13	0,17	0,27	0,52	1,02	1,04	1,04	1,02	1,00
10	0,07	0,06	0,08	0,08	0,09	0,12	0,20	0,52	1,14	1,07	0,97	0,99	1,00

$\theta = 120^\circ$	β												
rL^{-1}	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,5	0,25	0,26	0,27	0,28	0,31	0,35	0,41	0,50	0,60	0,73	0,87	0,97	1,00
1	0,18	0,19	0,19	0,21	0,23	0,27	0,33	0,43	0,57	0,76	0,95	1,04	1,00
2	0,13	0,13	0,14	0,14	0,17	0,20	0,26	0,46	0,55	0,83	1,07	1,03	1,00
5	0,08	0,08	0,08	0,09	0,11	0,13	0,16	0,27	0,53	1,01	1,04	1,03	1,00
10	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,09	0,13	0,20	0,52	1,13	1,06	0,98	1,00

$\theta = 135^\circ$	β												
rL^{-1}	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,5	0,24	0,24	0,25	0,26	0,28	0,32	0,36	0,42	0,52	0,63	0,76	0,90	1,00
1	0,18	0,17	0,18	0,19	0,21	0,23	0,28	0,34	0,44	0,59	0,78	0,95	1,00
2	0,12	0,12	0,13	0,14	0,14	0,17	0,20	0,26	0,37	0,56	0,84	1,05	1,00
5	0,08	0,07	0,08	0,08	0,09	0,11	0,13	0,17	0,28	0,54	1,00	1,04	1,00
10	0,05	0,06	0,06	0,06	0,07	0,08	0,09	0,13	0,21	0,53	1,12	1,05	1,00

$\theta = 150^\circ$	β												
rL^{-1}	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,5	0,23	0,23	0,24	0,25	0,27	0,29	0,33	0,38	0,45	0,55	0,68	0,83	1,00
1	0,16	0,17	0,17	0,18	0,19	0,22	0,24	0,29	0,36	0,47	0,63	0,83	1,00
2	0,12	0,12	0,12	0,13	0,14	0,15	0,10	0,22	0,28	0,39	0,59	0,86	1,00
5	0,07	0,07	0,08	0,08	0,08	0,10	0,11	0,13	0,18	0,29	0,55	0,99	1,00
10	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,07	0,08	0,10	0,13	0,22	0,54	1,10	1,00

$\theta = 165^\circ$	β												
rL^{-1}	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,5	0,23	0,23	0,23	0,24	0,26	0,28	0,31	0,35	0,41	0,50	0,63	0,79	1,00
1	0,16	0,16	0,17	0,17	0,19	0,20	0,23	0,26	0,32	0,40	0,53	0,73	1,00
2	0,11	0,11	0,12	0,12	0,13	0,14	0,16	0,19	0,23	0,31	0,44	0,68	1,00
5	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08	0,09	0,10	0,12	0,15	0,20	0,32	0,63	1,00
10	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,05	0,07	0,08	0,11	0,11	0,21	0,58	1,00

N. B. :

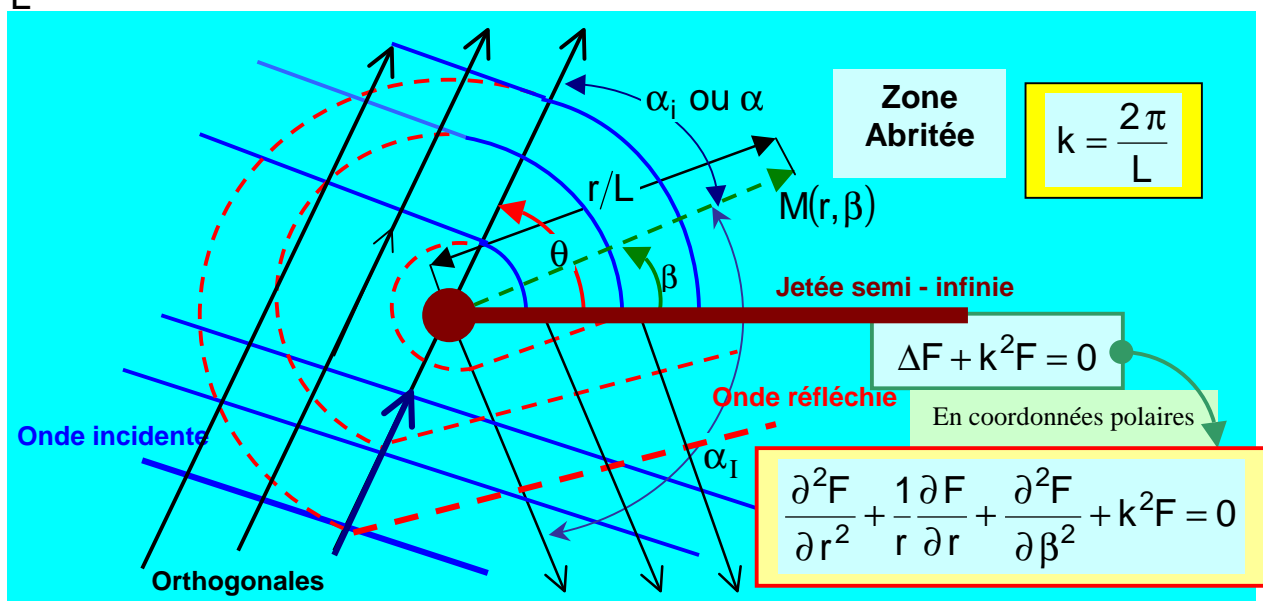
Pour **houle irrotationnelle** : $\Delta\phi = 0$ de **période T** et satisfaisant $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$ le long des parois

Posons : $\phi = \frac{gHT}{2\pi} \frac{chk(z+h)}{chkh} F(x,y) \exp\left(2i\pi \frac{t}{T}\right) \Rightarrow \Delta F + k^2 F = 0$ avec $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$

Equation de Helmholtz

$\theta = 180^\circ$	β												
rL^{-1}	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
0,5	0,20	0,25	0,23	0,24	0,25	0,28	0,31	0,34	0,40	0,49	0,61	0,78	1,00
1	0,10	0,17	0,16	0,18	0,18	0,23	0,22	0,25	0,31	0,38	0,50	0,70	1,00
2	0,02	0,09	0,12	0,12	0,13	0,18	0,16	0,19	0,22	0,29	0,40	0,60	1,00
5	0,02	0,06	0,07	0,07	0,07	0,08	0,10	0,12	0,14	0,18	0,27	0,46	1,00
10	0,01	0,05	0,05	0,04	0,06	0,07	0,07	0,08	0,10	0,13	0,20	0,36	1,00

Nous donnons en complément l'article de Penny et Price où ont résout analytiquement la diffraction d'une onde par une brise lame semi – infinie Les mêmes auteurs proposent d'interpoler linéairement en θ , β et /ou $\frac{r}{L}$ à fin de déterminer K_D pour des valeurs non – tabléés :



La solution de Sommerfield de la diffraction électromagnétique (optique) utilisée par Penny et Price est donnée par les équations :

$$F(r, \alpha) = f(u_i) \cdot \exp(-ikr \cos \alpha_i) + f(u_2) \cdot \exp(-ikr \cos \alpha_1) \quad \text{où}$$

$$u_i = -\sqrt{8r/L} \cos(\alpha_i/2) \quad \& \quad u_2 = -\sqrt{8r/L} \cos(\alpha_1/2) \quad \& \quad k = 2\pi/L$$

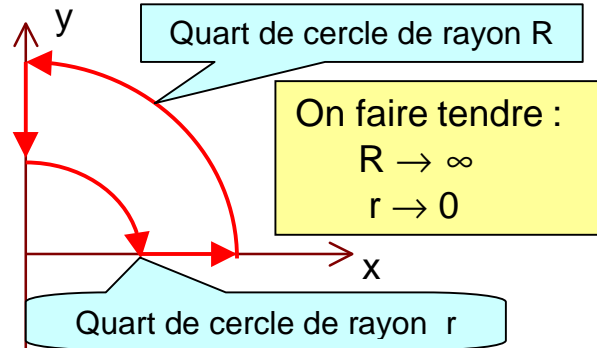
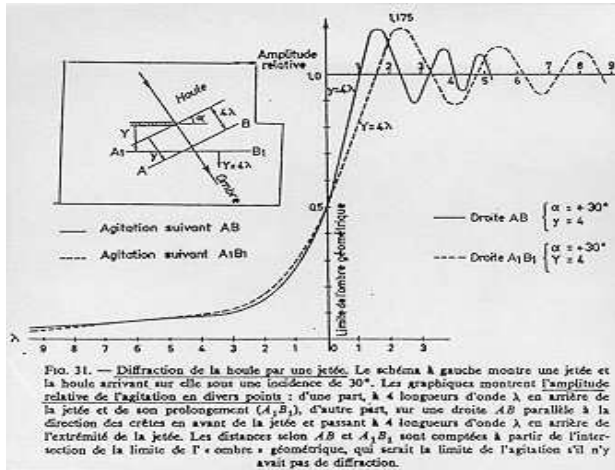
$$f(u) = \frac{1+i}{2} \int_{-\infty}^u \exp(-i\pi u^2) du \quad \& \quad f(-u) = \frac{1+i}{2} \int_{-\infty}^{-u} \exp(-i\pi u^2) du \quad \text{on a :}$$

$$f(u) + f(-u) = 1 \quad K_D \equiv \frac{\text{Hauteur de l'onde diffractée}}{\text{Hauteur de l'onde incidente}} = |F(r, \alpha)| = f\left(\theta, \beta, \frac{r}{L}\right)$$

On propose pour évaluer les intégrales de faire un développement en série les exponentielles et puis faire l'intégration. Exemple :

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots \right) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \dots \approx 0,31028$$

On peut également utiliser la méthode des résidus (Théorème de **Cauchy**) pour évaluer $\int_0^u \sin u^2 du$ et $\int_0^u \cos u^2 du$ en utilisant le changement de variable $x = u^2$ et en évaluant l'intégrale $\oint z^{-1/2} e^{iz} dz$ sur le contour suivant : Ces fonctions sont tabulées.



La méthode de **Larras** utilise la solution de la diffraction par une jetée semi-infinie. L'agitation est la somme de l'onde incidente diffractée H_i et de

+ **Méthode approchée de Larras** : l'onde réfléchie H_r .

La formule empirique donnant l'agitation H le long d'une orthogonale aux crêtes de la houle dans la zone de diffraction est :

$$H = \frac{H_0}{\pi} \text{Arc cot } g \frac{8\varphi}{\pi} + H_0 \left(1 - \frac{1}{\pi} \text{Arc cot } g \frac{8\varphi}{\pi} \right) \exp\left(-\frac{4r}{L_0}\right)$$

où H_0 et L_0 sont les valeurs au **musoir**. On a désigné par r = la distance du point considéré au musoir et par φ = l'angle de la ligne de crête locale par rapport à celle de la houle incidente. Cette formule de Larras est basée sur le fait qu'il subsiste une agitation résiduelle très loin du

musoir, égale à $(\pi^{-1}H_0 \text{Arc cot } g\pi^{-1}8\varphi)$ et qu'à partir du musoir l'agitation varie exponentiellement avec la distance.

- On propose maintenant une méthode numérique simple pour étudier l'agitation dans un bassin et déterminer ainsi les modes résonants (**seiches**) dans un **port** : c'est des ondes ayant une périodes d'une dizaines de secondes à quelques minutes et une amplitude de quelques décimètres.

Dans un domaine fluide on a établi que le potentiel de vitesse est régi par l'équation différentielle :

$$(h\Phi_x)_x + (h\Phi_y)_y - \frac{1}{g} \Phi_{tt} = 0$$

reportons de dans des solution harmonique $\Phi(x, y, t) = \varphi(x, y)e^{i\omega t}$ alors :

$$(h\varphi_x)_x + (h\varphi_y)_y + g^{-1}\omega^2 \cdot \varphi = 0$$

N. B. : si la profondeur d'eau est sensiblement constante on obtient l'équation **Helmholtz** : $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + (\omega^2/gh)\varphi = 0$

Le long des limites solides du bassin (lac) on impose : $\varphi_n = 0$.

Le problème ainsi posé est celui de calcul de valeurs propres en physique mathématique classique : c'est – à – dire que des solutions existent que pour des valeurs spéciales de ω .

On peut résoudre ce problème aux valeurs propre par une méthode aux différences finies en approximant les dérivées par : on pose $\Delta x = \Delta y = \delta$

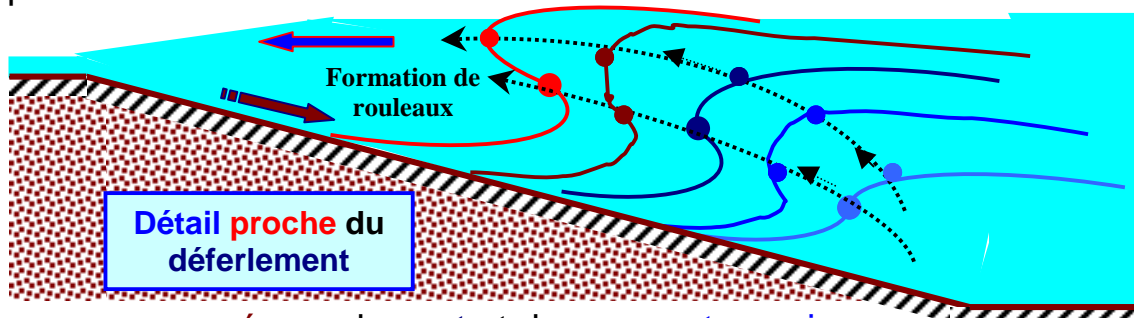
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}}{2\delta} ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \approx \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2\delta}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{\delta^2} ; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \approx \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{\delta^2}$$

Ainsi en chaque point du domaine l'équation d'Helmholtz est remplacée par l'équation aux différences :

$$-4\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j} + \delta^2 \cdot \frac{\omega^2}{gh} \cdot \varphi_{i,j} = 0$$

Ce qui donne un système à résoudre par un algorithme numérique en tenant compte des conditions aux limites : sur l'ouverture du bassin on impose l'onde incidente et vitesse nulle sur les limites solides.

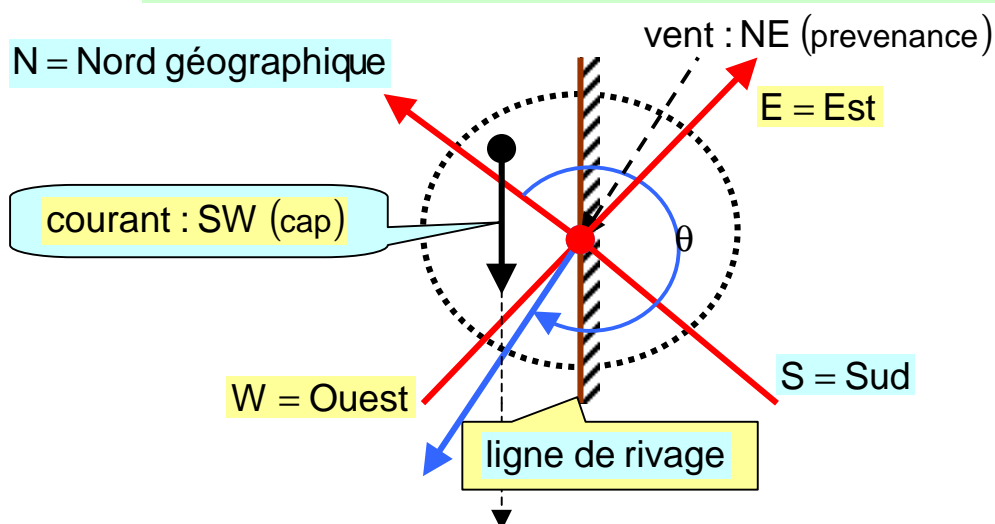


Remarque : repérage du vent et des courants marins

On repère généralement (sauf spécification du contraire) :

La direction du vent est celle de sa Provenance

La direction du courant marin est celle de son Cap



Remarques :

La diffraction par une passe était également développée par Penny et al. (1952). A une distance de la passe 2 à 3 fois la longueur d'onde, les lignes de crête sont essentiellement des arcs de cercles concentriques ayant le point central comme centre. Alors que Johnson à démontrer que si la passe a une largeur supérieure ou égale à 5 fois la longueur d'onde incidente, les effets de diffraction par chaque brise lame de chaque côté sont indépendants. On peut dans cette limite découpler les 2 jetées et appliquer séparément la théorie de la diffraction pour chaque brise lame. Diffraction – réfraction combinées :

On peut utiliser des méthodes d'approximation. Il est conseillé de recourir à de la modélisation Mathématique–numérique de ce problème, par exemple l'équation de Berkhoff : valable en théorie linéaire et pour faibles pentes bathymétriques (mild slope) mais cependant la profondeur

est variable :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla_h (c c_g \nabla_h \varphi) + (\omega^2 - k^2 c c_g) \cdot \varphi = 0 \quad (18)$$

Le potentiel de vitesse est défini par :

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{g}{\omega} \frac{c h k (h + z)}{c h k h} \cdot \varphi(x, y, t)$$

∇_h est l'opérateur nabla horizontal, $c = \frac{\omega}{k}$ est la célérité de la houle,

$c_g = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\text{sh} 2kh} \right) = n \cdot c$ est la vitesse de groupe et h la profondeur

locale d'eau.

Si on veut modéliser la réfraction – diffraction d'une onde périodique harmonique cette équation se simplifie, $\varphi = \Phi_0 \exp(i\omega t)$, en :

$$\nabla_h (c c_g \nabla_h \Phi_0) + \frac{c_g}{c} \omega^2 \Phi_0 = 0 \quad (19)$$

Si en plus on est en eau peu profonde alors elle se simplifie encore en :

$$\nabla_h (h \nabla_h \Phi_0) + \frac{\omega^2}{g} \Phi_0 = 0$$

qui se réduit à l'équation d'Helmholtz si la profondeur est constante :

$$\nabla_h^2 \Phi_0 + k^2 \Phi_0 = 0$$

Si la bathymétrie présente une pente non – faible on a selon J.T. Kirby (1986) une interaction entre l'onde incidente et la topographie $\xi(x, y)$ du fond :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla_h (c c_g \nabla_h \varphi) + (\omega^2 - k^2 c c_g) \cdot \varphi + \frac{g}{c h^2 k h} \nabla_h (\xi \cdot \nabla_h \varphi) = 0 \quad (20)$$

Si le fond est horizontal (très faible pente) les 2 équations se réduisent à celle de **Helmholtz** :

$$\nabla_h^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (21)$$

On rappelle que dans ces équations le potentiel de vitesse est défini par la relation :

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{g}{\omega} \frac{ch k(h+z)}{chkh} \cdot \varphi(x, y, t)$$



H. von Helmholtz
(1886)

N.B. : Pour l'étude numérique de la résonance portuaire on propose d'utiliser Berkhoff pour obtenir une méthode itérative dans le temps :

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} - (gh)^{-1} \Phi_{tt} = 0$$

Conditions aux limites :

- Sur les parois solides imperméables :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (n \text{ normale extérieure})$$

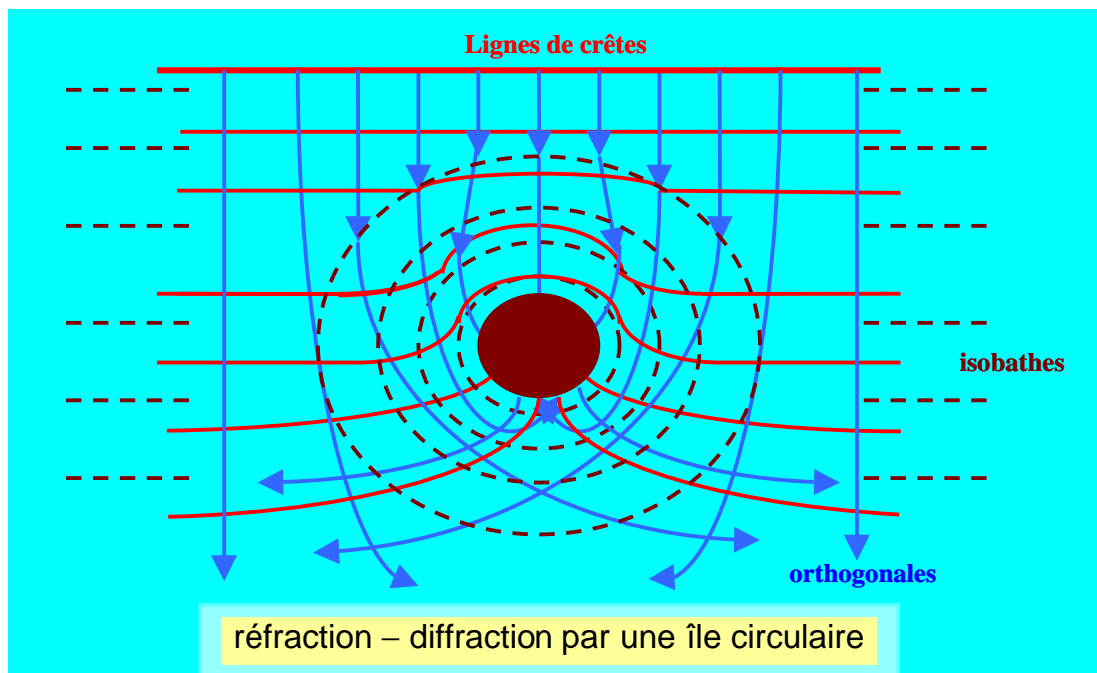
- Pour une réflexion partielle sur une limite :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \alpha \cdot ik\Phi \quad \text{où } \alpha \text{ est le coefficient d'amortissement sans dimension}$$

avec $\alpha = 0$ pour réflexion totale & $\alpha = 1$ pour absorption totale.

- Pour les limites lointaines 2 conditions sont nécessaires : l'onde sortante tend vers zéro vers l'infini (par rapport au port) et la condition de radiation de **Sommerfeld** :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} + ik\Phi \right) \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -ik\Phi$$



Fluctuations du niveau d'eau au rivage

- Marée
- Tsunamis
- Oscillations dans un bassin
- Houle de tempête
- Effets climatiques
- Effet géologique

La **marée** a des périodes principales de 12h 24mn et 24h, les tsunamis (tremblement de terre) ont des périodes de 5 à 60mn. Les oscillations de bassin (comme un port) sont des réponses de résonance à des excitations : les périodes de résonance dépendent de la géométrie du bassin et de la période de l'onde excitatrice ; elles peuvent varier de quelques mn pour un petit port ou un havre à quelques heures pour une baie large ou un golf. La houle de tempête est une oscillation du niveau de la mer qui résulte de les effets de la pression atmosphérique et de la contrainte de cisaillement du vent sur la surface libre qui durent pendant quelques heures à quelques jours. Ces effets climatiques sont saisonnier ou de plus longue période comme les effets géologiques.

Marée astronomique :

C'est l'attraction de la lune et du soleil sur la terre ainsi que les forces centrifuges (égales et opposées) qui sont les principales causes de la marée. La masse du soleil est $\approx 2,7 \cdot 10^7$ fois celle de la lune, vue les distances de la lune exerce une force à peu près 2 fois plus grande que celle du soleil.

Puisque la période de la marée est très grande alors sa propagation est analogue à une onde en eau peu profonde (onde de translation) même dans les eaux profondes (océans) :

$$\left[\frac{h}{L} \leq 0,05, \text{th} \frac{2\pi h}{L} \approx \frac{2\pi h}{L} \Rightarrow c = \sqrt{gh} \text{ et } L = cT \right]$$

Quand l'onde de marée se propage sur le plateau continental , dans les baies et les estuaires elle est fortement affectée par l'hydrographie, le frottement sur le fond (non – linéaire : excitation d'harmoniques) et la force de Coriolis ainsi que par les effets de résonance. Elle subit également de la diffraction par des caps de grand taille qui modifient fondamentalement la circulation marine à cette échelle.

Le temps d'arrivée de l'onde de marée en un endroit est contrôlé par la profondeur d'eau et sa réfraction : une modélisation numérique pour représenter ces divers effets sur sa propagation proche de la côte, dans un estuaire présente une grande importance pour les études d'impact environnementales. La marée subit une grande réflexion dans les baies car elle a une faible cambrure ce qui augmente son amplitude.

Dans l'hémisphère nord la force de Coriolis dévie l'écoulement vers la droite (à gauche dans l'hémisphère sud).

Les variations du niveau d'eau sont référencées à données variées selon la région du globe terre : voici quelques données :

- Mean Sea Level (**MSL**) [niveau moyen de la mer] : niveau moyen de la surface marine.
- Mean Low Water (**MLW**) [moyenne des eaux basses] : la moyenne de tous les niveaux bas de l'eau, à l'opposé (**MHW**).
- Mean Lower Low Water (**MLLW**) : la moyenne que des plus bas niveaux bas qui s'alternent, à l'opposé (**MHLW**).
- Mean Tide Level (**MTL**) : niveau calibrer à moitié entre MLW et MHL.

MSL , MLW et MLLW sont toujours déterminés sur l'enregistrement de 19 années.

MLW et MLLW sont utilisés pour gérer la navigation.

Tsunamis : Le terme tsunamis (du japonais) (Voir Ch09 HM) désigne les ondes longues engendrées par un **tremblement de terre**, **glissements de terrain**, **affaissement du fond marin** et **les éruptions volcaniques**. Ces ondes ont des amplitudes faibles au large (eau profonde) mais durant sa propagation vers la côte elles subissent la réfraction et une résonance dans les havres (baies , ports...) qui augmente considérablement leur amplitude, sans oublier leur fort **run – up** sur les plages et les structures portuaires (jetées) : ceci donnent naissance à des catastrophes et des victimes. La **période** est de **quelques mn à 60 mn** principalement.

Pour mettre en évidence l'effet de la profondeur sur son amplification prenons l'exemple d'une onde tsunamis de période 20mn et supposons que la profondeur moyenne est de 3800 m alors :

$$c = \sqrt{gh} = \sqrt{9,81 \cdot 3800} = 193 \text{ m/s (432 mph)}$$

$$L = c \cdot T = 193 \cdot 20 \cdot 60 = 2,31 \cdot 10^5 \text{ m (144 Miles)}$$

car $\frac{h}{L} = \frac{3600}{2,31 \cdot 10^5} = 0,016 < 0,05$ qui justifie l'utilisation de la théorie d'onde

longue (théorie SWW) . Plusieurs auteurs sont d'accord l'onde tsunamis a une amplitude de l'ordre de 1m dans un océan ouvert. On peut calculer le temps d'arrivé de l'onde en un endroit par intégration sur son chemin

de propagation (réfraction) : $t_{\text{arrivé}} = \sum \frac{\Delta s_i}{\sqrt{g \cdot h_i}}$

où \bar{h}_i est la profondeur moyenne sur l'intervalle Δs_i .

Sites sur les tsunamis : <http://www.germantown.k12.il.us/html/tsunami.html>
<http://www.geophys.washington.edu/tsunami/general/historic/chilean60.html>

- **Caractéristiques à la côte des tsunamis:** Voir Ch07 Hyd Maritime
Pour fixer les idées et comprendre comment une onde tsunamis change à l'approche d'un rivage prenons l'exemple de $T = 20$ mn dans une profondeur de 10m :

$$c = \sqrt{gh} = \sqrt{9,81 \cdot 10} = 9,9 \text{ m/s} \langle 193 \text{ m/s}$$

$$L = c \cdot T = 9,9 \cdot 20 \cdot 60 = 1,19 \cdot 10^4 \text{ m} \langle 2,31 \cdot 10^5 \text{ m}$$

En négligeant la réflexion et le frottement on a établi que la conservation

d'énergie entre 2 orthogonales conduit à la relation : $\frac{H_1}{H_2} = \sqrt{\frac{n_2 L_2}{n_1 L_1}} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}}$

Si on néglige la réfraction $K_R = 1$ si l'onde tsunamis a une amplitude de 1m dans 3800m, son amplitude H_{10} sera dans 10m de :

$$H_{10} = 1 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{2,31 \cdot 10^5}{1,19 \cdot 10^4}} = 4,4 \text{ m} \text{ car pour onde longue } n_1 = n_2 = n = 1$$

Ceci ne constitue qu'une approximation, généralement suffisante, car

$c = \sqrt{g(h + \eta)}$ pour pouvoir tenir compte du profile (de la forme) de

l'onde et principalement de son amplitude dans son gonflement.

Pour les ondes longues on a :

$$\frac{H_1}{H_2} = \sqrt{\frac{n_2 L_2}{n_1 L_1}} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} = \sqrt{\frac{c_2 T}{c_1 T}} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} = \left(\frac{h_2 + \eta_2}{h_1 + \eta_1} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{B_2}{B_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

faisons notre application numérique pour cette formule avec un coefficient de réfraction égal à 2 : la première approximation nous a donné $\eta_2 = 4,4 \text{ m}$ pour $\eta_1 = 1 \text{ m}$ alors :

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{3600 + 1}{10 + 4,4} \right)^{\frac{1}{4}} 2 = 4,359 \cdot 2 = 8,71 \text{ m} \Rightarrow H_{10} = 8,7 \text{ m}$$

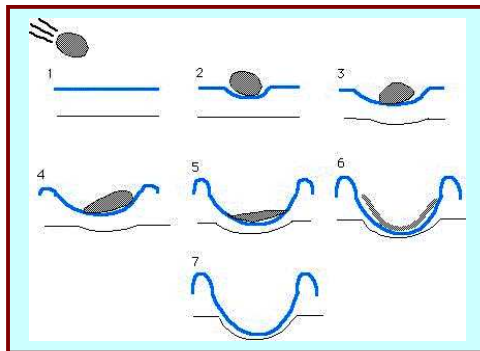
On peut calculer la puissance transmise par :

$$W = \frac{\rho g H_1^2}{8T} B_1 \sqrt{gh_1} = \frac{n_2 \cdot E_2}{T} B_2 = \frac{\rho g H_2^2 L_2}{8T} B_2 = \frac{\rho g H_2^2}{8T} B_2 \sqrt{gh_2}$$

On observe que dans les faibles profondeurs l'onde est très gonflée par l'effet de **Shoaling** dont la réfraction contribue significativement à cette amplification dans le cas d'une forte convergence des orthogonales : ce mécanisme qui est la base des **catastrophes** liées aux **ondes tsunamis**.



Le terme tsunami est un mot japonais composé de **tsu**, le port, et de **nami**, la vague; il signifie littéralement «vague portuaire» [l'expression française est « **raz - de - marée** »].

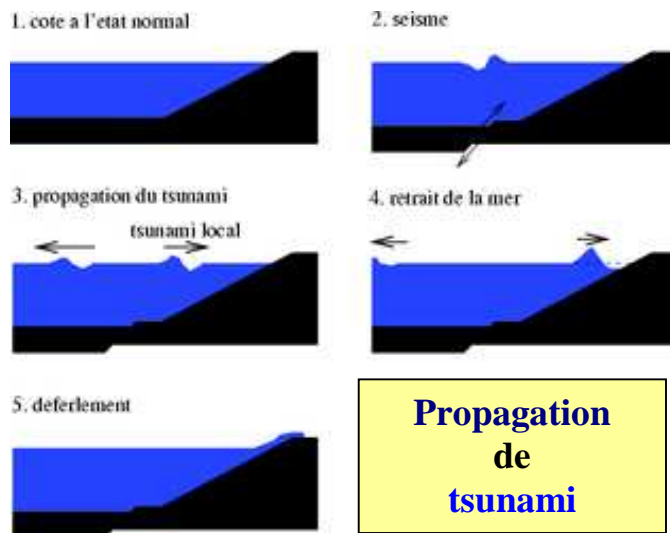


Impact d'une météorite

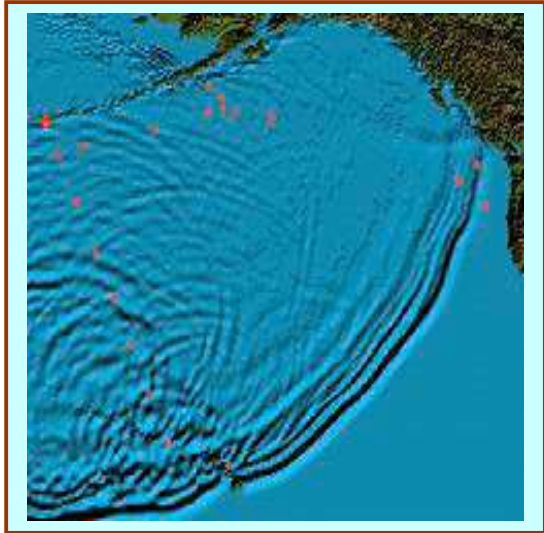
sol



Océan



Propagation de tsunami



création d'un tsunami par un séisme, propagation et déferlement sur les côtes

Quand une **météorite** de **diamètre D** tombe dans une eau profonde. La plus grande partie de l'énergie se transforme en onde de gravité de longueur d'onde $L_o \approx 2D$: alors l'anneau d'eau perturbée a approximativement $(4 g D t^2 / \pi)^{1/2}$ où t est l'intervalle de temps depuis que la météorite est tombée dans l'eau :

$E_c = 1/2 M v^2 = \rho g H_o^2 L_o B_o / 8 \Rightarrow H_o \approx 2 v \sqrt{M / \rho g L_o B_o}$ ← **conservation d'énergie**

N.B. : On peut déterminer la vitesse de chute par la conservation de $Q^{té} M^{ment}$:
 $d(M v) / dt = M g - f v$ où $M = M_o - \alpha t$



Village de Gleebruk après le passage du tsunami du 26 décembre 2004 vu par satellite



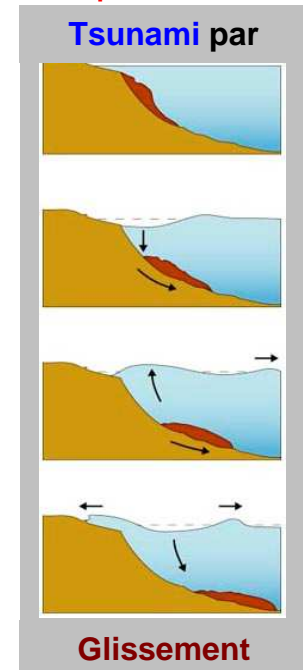
Banda Aceh (Indonésie) avant et après le tsunami du 26 décembre 2004

Prévention : la présence d'un système d'alerte permettant de l'annoncer à la population quelques heures avant la survenue d'un tsunami, la sensibilisation des populations côtières aux risques et aux gestes de survie, et la sécurisation de l'habitat permettent de sauver la plupart des vies humaines.

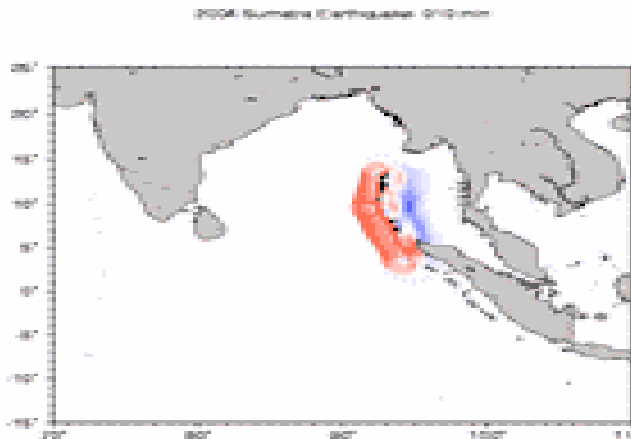
* Un tsunami possède 2 paramètres fondamentaux :

- l'énergie mécanique **E** libérée
- sa période **T** (Dans la pratique, un tsunami est un **court train d'onde** qui est caractérisé par son **spectre**)

Ces paramètres sont sensiblement constants au cours de la propagation du tsunami, dont la perte d'énergie par **friction** est faible du fait de sa grande longueur d'onde.



® Vitesse de propagation (célérité de l'onde tsunamis) :



Propagation du tsunami du 26 décembre 2004

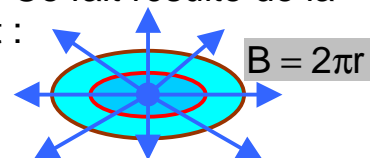
Pour les tsunamis de période suffisamment longue, typiquement une dizaine de minutes, soit la plupart des tsunamis d'origine tectoniques, la vitesse v de déplacement d'un tsunami (sa célérité : c) est fonction de la profondeur d'eau h : $\omega^2 = gk \cdot thkh$ onde longue \rightarrow $c = \sqrt{gh}$

™ Amplitude :

Pour des tsunamis de longue période, qui présentent peu de dissipation d'énergie même sur de grandes distances, l'amplitude A du tsunami est donnée par la relation : $A \sim E^{1/2} r^{-1/2} h^{-1/4}$ c'est-à-dire que l'amplitude augmente lorsque l'eau devient moins profonde selon loi de Green : $h^{-0,25}$, en particulier à l'approche des côtes et quand l'énergie est plus élevée. Elle diminue avec la distance r en $r^{-0,5}$. Ce fait résulte de la conservation de l'énergie entre 2 rayons en effet :

$n \rho g H^2 L B / 8 T = Cte \Rightarrow A^2 h^{1/2} B = C^{te} = E \Rightarrow$

$A = E^{1/2} \cdot h^{-1/4} \cdot B^{-1/2}$ **cqfd** car $H \equiv 2 \cdot A$



Pour les tsunamis de faible période (ceux d'origine non sismique) la décroissance avec la distance peut être beaucoup plus rapide.

Déferlement sur les côtes :



Tsunami inondant les côtes du Sri Lanka le 26 décembre 2004

Les dangers liés aux tsunamis sont dus à l'inondation qui en résulte, à la force du courant qu'ils engendrent tant lors du flux que du reflux et à sa capacité à happer les personnes au large :

Dégâts matériel



Pertes Humaines

Destruction du Train qui va de Sumatra à Colombo : plus de 1300 morts

Mégatsunamis :

On définit comme mégatsunami un tsunami dont la hauteur au niveau des côtes dépasse cent mètres. Un mégatsunami, s'il se propage librement dans l'océan, est capable de provoquer des dégâts majeurs à l'échelle de continents entiers. Les séismes étant incapables *a priori* d'engendrer de telles vagues, seuls des événements cataclysmiques, tels un impact météoritique de grande ampleur ou l'effondrement d'une montagne dans la mer, en sont la cause possible.

+ Kaplan (1955) propose les formules empiriques suivantes pour calculer le run – up sur les talus de pente $\frac{1}{30}$ et $\frac{1}{60}$:

$$\begin{aligned} \frac{R}{H} &= 0,381 \cdot \left(\frac{H}{L}\right)^{-0,316} && \text{pour la pente } \frac{1}{30} \\ \frac{R}{H} &= 0,206 \cdot \left(\frac{H}{L}\right)^{-0,315} && \text{pour la pente } \frac{1}{60} \end{aligned} \quad (22)$$

où H et L sont l'amplitude et la longueur d'onde au pied de l'ouvrage ; et R [Run – Up] l'élévation (ascension) mesurée verticalement au dessus du niveau de repos (SWL : Still Water Level). Ces formules sont en principe valables pour $\frac{H}{L} \geq 10^{-3}$. Pour d'autres données utiliser l'abaque du run – up. Continuons notre exemple dans une eau de 5,6 m on a une amplitude de 4,4m donc : $\frac{H}{L} = 3,7 \cdot 10^{-3}$ la première équation donne un run – up : $R/H = 3,6 \Rightarrow R = 15,9\text{m}$ une montée d'eau verticale le long de l'ouvrage de pente $\frac{1}{30}$ de 15,9m. Donc une possibilité de franchissement par l'onde tsunamis en question.

Pour un projet il faut prévoir le temps d'arrivé de ce type d'onde pour pouvoir évacuer les personnes et mettre à temps le bien à l'abri . Les dommages sont dû aux inondations et à la grande vitesse de projection de l'onde tsunamis sur la terre et les ouvrages maritimes sans oublier l'impact des solides emportés par ce fort courant.

La vitesse u de projection sur une paroi est donnée par : $u = C \cdot \sqrt{gh}$

C est un coefficient qui dépend de la nature de la paroi : $0,7 \leq C \leq 2$

- 0,7 pour une paroi à fort frottement (rugueuse et poreuse)
- 2 pour une paroi lisse (de faible frottement)

Prenons une valeur caractéristique de la profondeur $h \approx 3\text{m}$ et un coefficient $C \approx 1,5$ alors $u \approx 14,1\text{m/s}$: cette vitesse peut endommager profondément les structures marines, emporter très loin l'outillage portuaire, les voitures et les bateaux et donne des victimes... sans oublier les inondations des quais, des magasins et les terres ...

Oscillations dans les bassins (ou les darses)

Il existe des systèmes qui répondent à une excitation en développant une force de rappelle qui tend à ramener ces systèmes à une situation d'équilibre. Contrairement à la force d'inertie qui tend à porter le système hors d'équilibre et le mettre sous oscillation libre à sa période propre (ou naturelle) si l'excitation a cessée : L'exemple le pendule simple.

La fréquence propre dépend de la géométrie, elle est principalement indépendante de l'amplitude de l'excitation, au moins en linéaire.

Après l'excitation le système continue a oscillé à sa période avec une amplitude qui décroît exponentiellement dans le temps sous l'effet du frottement . On peut forcée ces systèmes à osciller à des fréquences différentes de celles naturelles en maintenant et en communiquant de l'énergie périodiquement à des fréquences différentes de celles naturelles à ces systèmes.

Si la fréquence de l'excitation est proche de d'une fréquence propre du système on a souvent une amplification qui dépend du rapport de la fréquence appliquée à celle naturelle et des caractéristique du frottement. A le rapport de fréquence est égale à 1 on a résonance.

Un bassin fermé ou semi – fermé (comme un port , une baie , un lac) peut osciller à sa propre fréquence (ou l'une de ces harmoniques) ou être soumis à une oscillation forcée. Le résultat est oscillation du plan d'eau ou des seiches (faible clapotis) qui est dû aux réflexions multiples dans le bassin (les limites).

Les sources de ces excitations sont divers :

- Le spectre incident ambient (houles) si le bassin est ouvert sur l'extérieur (la passe d'un port).
- Fluctuations de la pression atmosphérique.

- Basculement de la surface libre sous l'effet du cisaillement du vent avec les relâchements alternés dans le temps et consécutifs.
- Tourbillons et remous développés et engendrés par des courants marins à l'entrée du port ...Etc.

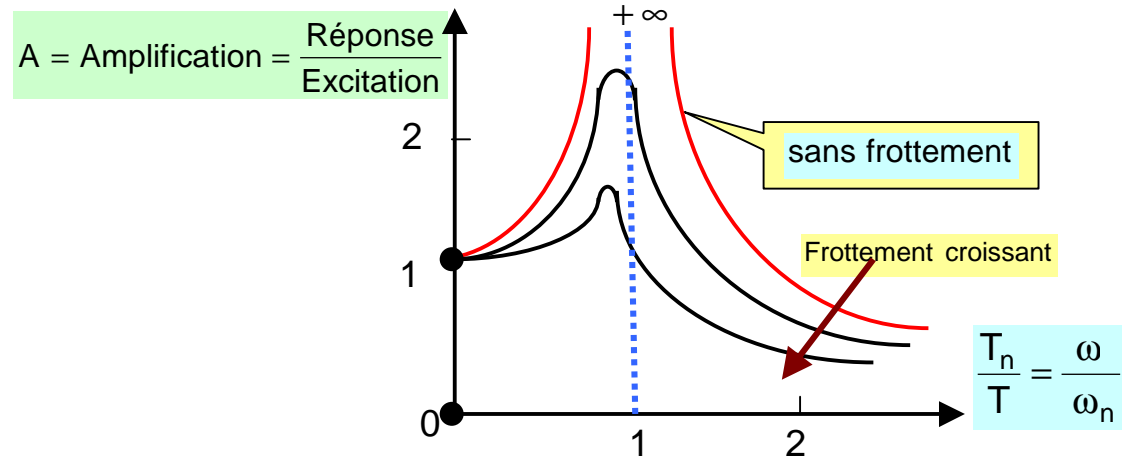
Les oscillations dans les baies et dans les ports sont souvent de faibles amplitudes et relativement de longues périodes. Les dommages sont potentiellement dus à :

- Aux mouvement horizontaux de longue amplitude (échelle).
- A des courants forts et réversibles qui s'induisent à l'entrée du port et dans des zones qui contractent fortement l'écoulement.

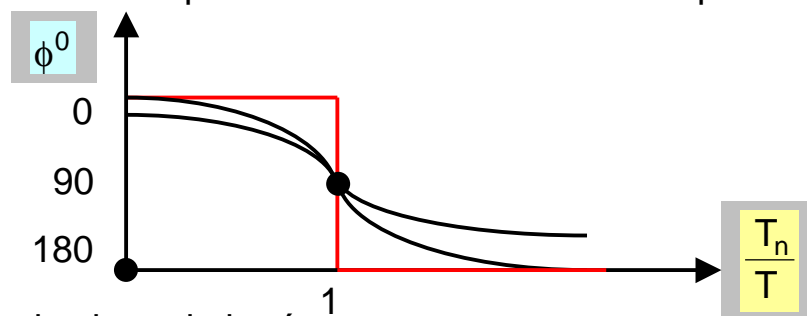
Ce qui peut être préjudiciable à la navigation.

On donne à titre d'indication les résultats pour un pendule :

Le coefficient d'amplification (rapport de l'amplitude de la réponse à celle de l'excitation) : si la période de l'excitation T est proche de celle naturelle T_n on a une amplification importante (résonance) :



Le déphasage ϕ entre la réponse et l'excitation est donné par :



Ceci explique la physique de la résonance.

➔ Résonance dans un bassin à 2 dimensions :

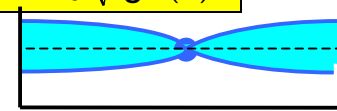
On rappelle qu'on peut déterminer la période naturelle d'un bassin [une darse] 1D par :

- Pour un bassin ouvert ou fermé aux 2 extrémités :

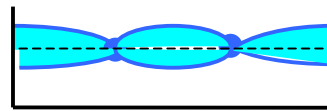
$$T_n = \frac{2}{n+1} \cdot \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}$$



Périodes naturelles d'oscillation libre



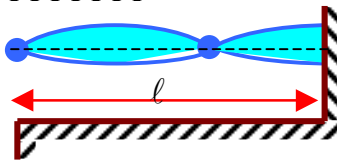
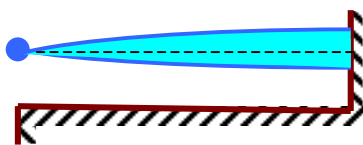
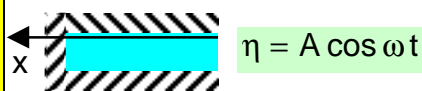
fondamental : n = 0



1^{ère} harmonique : n = 1

- Pour un bassin ouvert à une extrémité seulement [onde longue] :

$$T_n = \frac{4}{2n+1} \cdot \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}$$



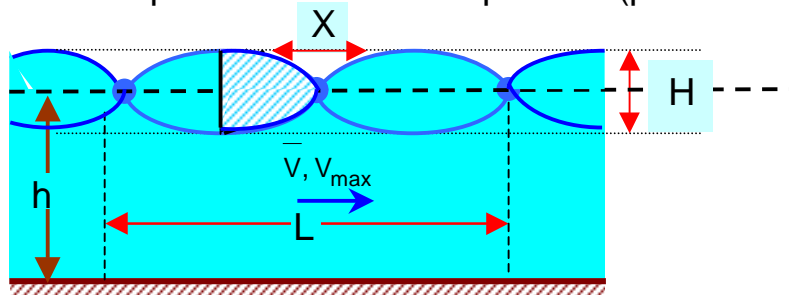
Voir exercice 22

$$\xi(x,t) = \frac{cA}{\omega h} \frac{\sin\left[\frac{\omega}{c}(l-x)\right]}{\cos\left[\frac{\omega l}{c}\right]} \cos \omega t \text{ et } \eta(x,t) = A \frac{\cos\left[\frac{\omega}{c}(l-x)\right]}{\cos\left[\frac{\omega l}{c}\right]} \cos \omega t : 0 \leq x \leq l$$

l est la longueur du bassin, ξ est le déplacement des particules fluides, n un entier caractérisant l'harmonique et $h(x)$ le tirant d'eau : $c = \sqrt{gh}$. La résonance a lieu quand le dénominateur est nul : c'est – à – dire

$$\frac{\omega_n l}{c} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi c}{2l} (2n+1) = \frac{2\pi}{T_n} \Rightarrow T_n = \frac{4l}{(2n+1) \cdot \sqrt{gh}} \quad (23)$$

Le déplacement horizontal maximal X d'eau se produit sous les nœuds ainsi que pour la vitesse. Si nous supposons que le profil de la surface libre est sinusoïdal, le volume d'eau ∇ qui travers une ligne verticale passant par un point nodal pendant une demi - période (partie hachurée)



$$\bar{V} = 2 \int_{-\frac{L}{4}}^{\frac{L}{4}} \frac{H}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{H \cdot L}{2\pi}$$

où H est l'amplitude de l'onde et L sa longueur d'onde dans l'eau de profondeur h.

La vitesse moyenne horizontale \bar{V} sous le point nodal est par définition le volume d'eau divisé par le temps $\frac{T_n}{2}$ et par la section transversale h :

$$\bar{V} = \frac{H \cdot L}{\pi \cdot h \cdot T_n}$$

Puisque le mouvement est sinusoïdal la vitesse maximale est :

$$V_{\max} = \frac{\pi \cdot \bar{V}}{2} \text{ alors } V_{\max} = \frac{H \cdot L}{2 \cdot h \cdot T_n} = \frac{H \cdot c}{2h} = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (24)$$

Comme par définition le déplacement horizontal maximal sous le nœud est le produit de la vitesse maximale par le temps qui est ici la moitié de la période (résonante) $\frac{T_n}{2}$:

$$X = V_{\max} \cdot \frac{T_n}{2} = \frac{H \cdot L}{2\pi \cdot h} = \frac{H \cdot c}{2h} = \frac{H \cdot T_n}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (25)$$

‡ Application numérique :

par exemple dans un bassin fermé de profondeur d'eau 8m, de longueur 1000m et l'amplitude de l'onde est 20cm :

prenons le mode fondamental (n = 0) on a alors :

$$T_n = \frac{2 \cdot 1000}{\sqrt{9,81 \cdot 8}} = 226 \text{ s (3,77mn)}, \quad V_{\max} = \frac{0,2}{2} \sqrt{\frac{9,81}{8}} = 0,11 \text{ m/s}$$

$$X = \frac{0,2 \cdot 266}{2\pi} \sqrt{\frac{9,81}{8}} = 7,96 \text{ m}$$

Quoique la vitesse maximale est faible, une onde de grande période mais le déplacement horizontal est important : ce qui pose des grandes difficultés à l'amarrage des navires ... Etc.

Plusieurs bassins sont plus long que large : les oscillations longitudinales sont plus importantes que celles transversales : une modélisation 1D est suffisante pour déterminer les modes propres. Soit :

$$T_n = \frac{2}{n+1} \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{g \cdot h(x)}} \text{ pour bas sin fermé} \quad (26)$$

et

$$T_n = \frac{4}{2n+1} \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{g \cdot h(x)}} \text{ pour bassin ouvert } (27)$$

En général la profondeur d'eau $h(x)$ n'est connue qu'en quelques points on recourt au calcul numérique :

$$T_n = \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta x_i}{\sqrt{gh_i}} \leftrightarrow (\text{bassin fermé})$$

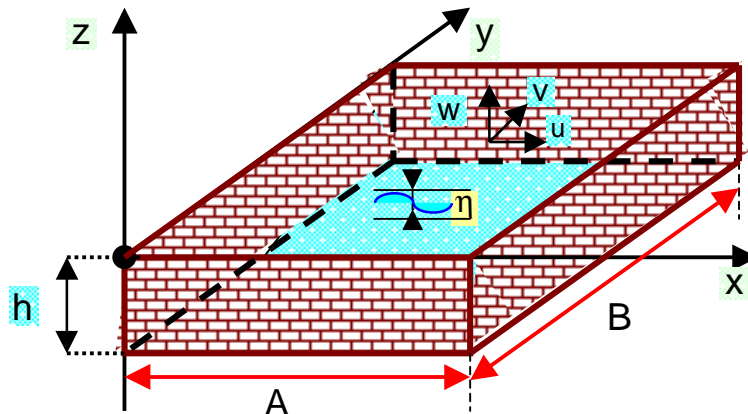
$$T_n = \frac{4}{2n+1} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta x_i}{\sqrt{gh_i}} \leftrightarrow (\text{bassin ouvert})$$

ces formules supposent qu'on a un nœud sur la limite largement ouverte sur la mer et un ventre à la limite solide. Dans la réalité on a des conditions plus compliquées sur ces limites. Notre calcul nous donne néanmoins une première estimation et une compréhension de la physique de la résonance portuaire. Un modèle mathématique – numérique plus sophistiqué est nécessaire pour l'obtention de bons résultats. On donnera par ailleurs ce genre de modèles à titre d'estimation.

On peut remédier à la résonance par 3 méthodes : augmenter la **profondeur d'eau**, par **changement de géométrie** à la conception et / ou par **l'absorption** de la houle par les limites très réfléchissantes du havre.

Résonance dans un bassin 3 dimensions :

Soit un bassin ayant des dimensions comparables. On va prendre le cas d'un bassin de forme rectangulaire :



On a résoudre l'équation de Laplace pour un écoulement irrotationnel donc a potentiel de vitesse :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

avec les conditions aux limites (à la surface libre, sur les parois et sur le fond) soit :

- $\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$ condition à la surface libre
- $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0 \text{ ou } A} = 0$ conditions sur les parois verticales
- $v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=0 \text{ ou } B} = 0$ conditions sur les parois verticales
- $w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0$ conditions sur le fond imperméable

où on a supposé : faible amplitude et bassin de **faible profondeur**.
 La solution est : (obtenue par séparation des variables)

$$\Phi = \frac{Hg}{2\omega} \cos \frac{n\pi x}{A} \cos \frac{m\pi y}{B} \sin \omega t$$

où n et m sont 2 entiers naturels (0,1,2,3,...). Le profil de la surface libre

est donné par :

$$\eta = \frac{H}{2} \cos \frac{n\pi x}{A} \cos \frac{m\pi y}{B} \cos \omega t$$

L'équation de continuité nous conduit aux modes résonants :

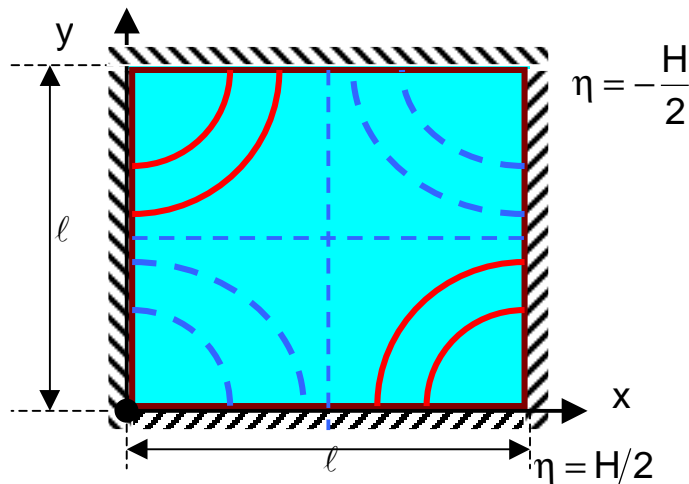
$$T_{n,m} = \frac{2}{\sqrt{gh}} \left[\left(\frac{n}{A} \right)^2 + \left(\frac{m}{B} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (29)$$

Aux points nodaux on a : $\eta \equiv 0 \forall t$ alors $\cos \frac{n\pi x}{A} \cos \frac{m\pi y}{B} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{n\pi x}{A} \text{ ou } \frac{m\pi y}{B} = \frac{\pi}{2}, \pi, \dots \Rightarrow x = \frac{A}{2n}, \frac{A}{n}, \dots \text{ ou } y = \frac{B}{2m}, \frac{B}{m}, \dots$$

Exemple : prenons un bassin carré ($A = B = \ell$) et choisissons le

mode $n = m = 1$: $\eta = \frac{H}{2} \cos \frac{\pi x}{A} \cos \frac{\pi y}{B} \cos \frac{2\pi t}{T}$, $T = T_{1,1} = \frac{\ell \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{gh}}$



Cette figure montre l'agitation à $t = 0$ avec en pointillé les abaissements et en continue les hausses. A $t = 0,25T$ le plan d'eau est horizontal plat, à $t = 0,50T$ on a un renversement $c - à - d$ le pointillé devient continu et le continu devient pointillé, $t = 0,75T$ le plan d'eau redevient plat et à $t = T$ on retrouve l'état à l'instant $t = 0$ et ainsi de suite.

On peut déterminer le champ de vitesse par :

$$\vec{v} = \text{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$$

Wilson a relevé dans un port rectangulaire au sud des Amériques de longueur 1825m, large de 640 à 670m et de profondeur 13m dont la passe a une largeur de 122m du côté le plus long : le port se comporte comme un bassin fermé ayant des modes : $(n = 0, m = 1)$; $(n = 1, m = 0)$; et $(n = 2, m = 0)$ de période respectivement 5,6 ; 1,8 et 0,9mn . Ce port résonne à la plus longue période du spectre incident. La passe initialement était de 228m mais les oscillations étaient indésirables alors les concepteurs ont opté pour une réduction de la largeur de la passe à 122m mais vue la tendance à l'augmentation de la taille des navires ils ont choisit une passe de 183m. L'étude hydrodynamique sur modèle réduit montre l'amplification augmente de 30 à 35% .

+ Résonance d'Helmholtz :

En plus des modes résonants dans un bassin discutés précédemment, un bassin ouvert à la mer à travers une passe peut également résonner à un mode dit **mode d'Helmholtz** : le plan d'eau du bassin se soulève et s'abaisse dans le temps uniformément mais à l'entrée (au niveau de la passe) on a une oscillation en va et vient (le mouvement est analogue à celui d'un système a un seul degré de liberté). **La période de résonance**

T_H est donnée par [Carrier et al.1971] :

$$T_H = 2\pi \sqrt{\frac{(L_c + L'_c) A_b}{g \cdot A_c}} \quad (30)$$

où A_b est l'aire de la surface du plan d'eau du bassin ; A_c est la section transversale du bassin ; L_c est la longueur du chenal et L'_c est une longueur corrective additive qui tient compte des masses ajoutées aux 2 extrémités ouvertes du bassin sur l'extérieur (effet de bord : accélération et décélération de l'écoulement) qui est responsable de cette résonance.

Miles (1948) propose la formulation:

$$L'_c = -\frac{W}{\pi} \cdot \log_e \left(\frac{\pi W}{T_H \cdot \sqrt{gh_c}} \right) \quad (31)$$

où W et h_c sont respectivement la largeur et la profondeur du chenal (la passe) d'accès au port.

Ce mode Helmholtz a une période plus grande que la période fondamentale donnée précédemment qui semble être important pour les

ports océaniques qui sont excités par des ondes tsunamis (ou des périodes voisines : Miles 1974). C'est ce mode d'oscillation résonante qui est le plus significatif dans plusieurs ports et dans les grands lacs et les grands barrages (Sorensen et Seelig 1976) qui répondent à une tempête dont le spectre énergétique est suffisant.

Houles de tempête (Storm Surge) : ce sont des ondes longues

Une tempête qui s'exerce sur la surface libre d'un plan d'eau d'un grand ouvrage hydraulique à surface libre ou sur une étendue océanique proche de la côte peut engendrer des fluctuations du niveau d'eau si la tempête est suffisante en durée et en énergie.

Ce phénomène est connu sous la désignation de houle de tempête ou la **marrée météorologique** : les principales causes du basculement du plan d'eau sont : la contrainte du vent sur la surface libre (qui s'oppose à la contrainte sur le fond), l'accélération de Coriolis car les ondes sont longues, fluctuations de la pression atmosphérique... Etc.

Le calcul de la marrée météorologique nécessite des données sur le vent et la pression atmosphérique (data météorologiques) : leur variation dans le temps et dans l'espace sur le plan d'eau en question.

Un ouragan est une tempête cyclique :

[L'étude des **ouragans** < qui vient du mot **arawak** dont l'origine est une langue indienne d'Amérique : ce sont des gigantesques tempêtes circulaires dont le diamètre ~ 300 Km et des vitesses ~ 150 Km / h : c'est une aspiration d'air > et **tornades** < qui signifie mauvais esprit : constituées par une colonne de nuages (cumulus ou cumulo – nimbus en forme d'entonnoir de diamètre au sol ~ 500 m 'voir 1 Km' : cette colonne nuageuse tourbillonne en aspirant l'eau > ; ce sont des phénomènes météorologiques violents quand ils atteignent les régions littorales où ils peuvent causer des dégâts énormes].

Le mécanisme responsable de sa formation est le réchauffement d'air humide qui coule vers le centre (eye) de l'ouragan où il cède son excès de chaleur en montant et il se produit alors une condensation de l'humidité dans l'air. Une fois l'air au centre il coule vers l'extérieur en hautes altitudes. Au niveau du sol l'accélération de Coriolis impose un écoulement vers le centre de l'ouragan dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (en sens inverse pour l'hémisphère sud) : **c'est donc un mouvement en spirale**.

Les vitesses du vent augmentent à un maximum V_x (vers 10m de la surface de la mer) dans un rayon R du centre de faible valeur et puis diminuent rapidement vers le centre (eye). La pression chute de la pression ambiante aux limites extérieures à une valeur plus faible au centre qu'on désigne par **CPI** (Central Pressure Index) donnée en général en unité de longueur mercure Hg (**inches mercury**). Les autres paramètres importants caractérisant un ouragan est sa vitesse de déplacement V_F (**forward speed**) et sa direction. Ainsi les paramètres

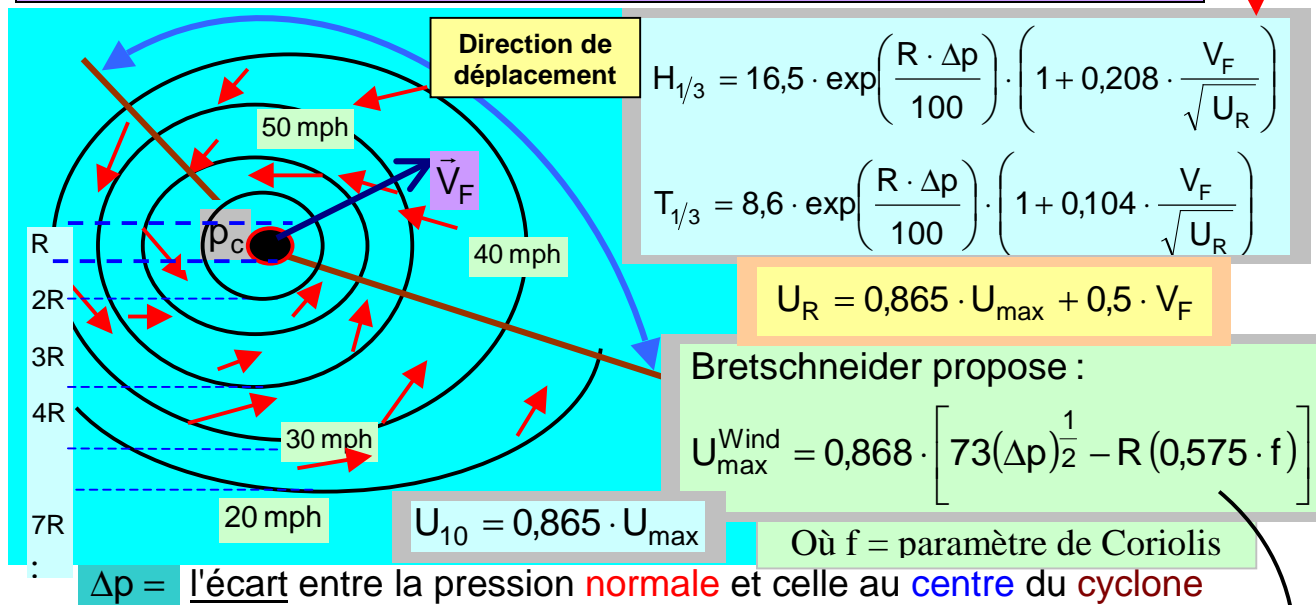
sont : CPI, R, V_x, \dots . **Rayers** (1954) propose une formule empirique pour

représenter la distribution de pression :
$$p_a - p_r = (p_a - CPI) \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{r}} \right)$$

où p_r est la pression à une distance r du centre (eye) de l'ouragan et p_a est la pression ambiante qui en générale de l'ordre de 29,92 d'Hg. Pour chaque zone : R et V_F sont des caractéristiques données pour la surface mise en jeu où ils sont des constantes : A. **Brebner** et al. proposent

quand $gF/U_{10}^2 < 10^4$: les plus grandes ondes dans le cyclone sont

$$H_{1/3} = 0,0555 \cdot (U_{10}^2 F)^{1/2} \quad \text{et} \quad T_{1/3} = 0,5 \cdot (U_{10}^2 F)^{1/4} \quad \text{où} \quad \begin{cases} F \text{ en ft} \\ U_{10} \text{ en knots} \\ F \text{ en nautical miles} \end{cases}$$



(œil) en inches of mercury et R en NM : $\Delta p \equiv p_{Atmosphérique}^{Normale} - p_c$ **Kraft propose**

Quand $V_F = C_g$ on obtient les plus grandes valeurs de $H_{1/3}$ & de $T_{1/3}$, elles sont données alors par :

$$\begin{aligned} (H_{1/3})_{critique} &= 25,8 \cdot \exp\left(\frac{R \cdot \Delta p}{100}\right) \\ &\& (T_{1/3})_{critique} &= 10,7 \cdot \exp\left(\frac{R \cdot \Delta p}{200}\right) \end{aligned}$$

Si on néglige l'effet de Coriolis

$$U_{max} \approx 60 \cdot \sqrt{\Delta p}$$

Les lignes concentriques donnent la vitesse du vent à 10m de la surface d'eau, les flèches indiquent la direction du vent.

Pour une valeur de R fixée : (R : petit $\approx 7n.m.$ moyen $\approx 14n.m.$ grand $\approx 26n.m.$)

on peut déterminer sur le graphe sur quel étendu la vitesse du vent excède une valeur voulue.

Calcul des houles de tempête :

Ce calcul nécessite la résolution numérique avec effet de la couche limite les équations hydrodynamiques.

Si en première approximation on adopte une approche quasi – hydrostatique (pour un avant projet) on va donner les composantes :

- **Élévation initiale :**

On observe au rivage une montée du niveau d'eau de 0,5m ou plus au – dessus du niveau de la marée astronomique, ceci avant même l'arrivée de la tempête : [0,6 – 0,75].

- **Élévation de pression :**

En appliquant la loi hydrostatique : la variation du niveau d'eau S_p due à un écart de pression Δp qui s'exerce sur la surface libre entre

2 points est :

$$S_p = \frac{\Delta p}{\rho g}$$

si Δp est la chute de pression entre la périphérie de l'ouragan et un point à l'intérieur de celui – ci alors :

$$S_p = \frac{p_a - p_r}{\rho g} = \frac{p_a - CPI}{\rho g} \left(1 - e^{-\frac{R}{r}} \right)$$

L'élévation de pression au centre (eye) est de l'ordre de 1m.

- **Excitation d'ondes longues :**

Pour plus d'information à ce sujet voir chapitre 04 "interaction air – mer"; une perturbation qui s'exerce sur un plan d'eau en se déplaçant engendre des ondes. Ceux – ci atteignent leur amplitude maximale quand la vitesse de déplacement de cette perturbation est égale à la célérité de ces ondes ; en faible profondeur c'est \sqrt{gh} ;

ceci si la perturbation dure un temps suffisant pour que l'onde se développe et se forme (c'est – à – dire atteindre l'équilibre entre le taux énergétique entrant de l'air à l'eau et celui dissipé dans l'eau).

La profondeur critique définit par : $V_F = \sqrt{gh}$ pour des ouragans de vitesse 10,20 et 30 Knots sont respectivement 3,11 et 26m. Ce phénomène entraîne une résonance (amplification) de l'élévation de pression précédemment citée.

- **Transport de masse et remontée d'eau sur le rivage**

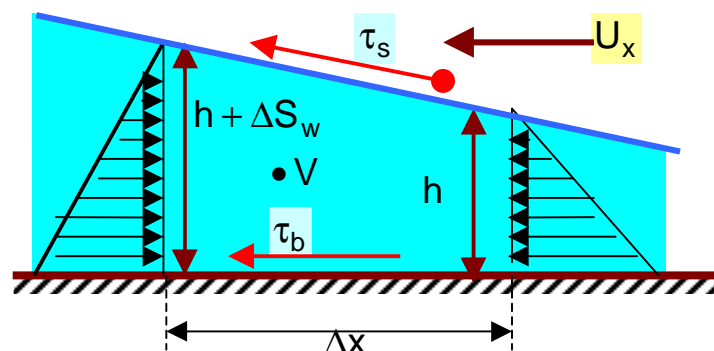
(**wave setup**) : Les ondes engendrées par une tempête causent également une élévation S_{ww} du niveau l'eau (wave setup at the shore) qui résulte d'un transport de masse : on peut utiliser

l'équation de Saville (1961) pour ces ondes déferlantes sur une

plage :

$$S_{ww} = 0,19 \cdot \left\{ 1 - 2,82 \sqrt{\frac{H_b}{gT^2}} \right\} \cdot H_b \quad (32)$$

- Inclinaison de la surface libre due aux contraintes du vent et du fond** : La contrainte que le vent exerce sur la surface d'eau est donnée par : $\tau_s = C_d \cdot \rho_a \cdot U^2$ (33) où ρ_a est la masse volumique de l'air à une certaine distance de la surface libre (10m en général) et C_d un coefficient fonction de la rugosité de surface et régime hydrodynamique de la couche limite. Wilson propose en se basant sur plusieurs mesures un C_d variant de $1,5 \cdot 10^{-3}$ pour un vent fort à $2,4 \cdot 10^{-3}$ pour un vent très fort. Il est souvent recommandé d'écrire : $\tau_s = K \cdot \rho \cdot U^2$ (34) avec ρ la masse volumique de l'eau et on adopte pour K une formule couramment utilisée : $K = 1,21 \cdot 10^{-6} + 2,25 \cdot 10^{-6} (1 - 5,6/U)^2$ (35) avec U en m/s. La contrainte qu'exerce le vent sur la surface engendre un courant qui, en eau de profondeur suffisamment faible, induit une contrainte τ_b qui s'exerce sur le fond. Saville (1952) propose en se basant sur l'expérience : $\tau_s + \tau_b = (3,3 \cdot 10^{-6}) \cdot \rho U^2$ et si on accepte un K de l'ordre $K \approx 3 \cdot 10^{-6}$ on en déduit que $\tau_b / \tau_s \approx 10\%$ qu'on peut utiliser si on n'a pas de données, si non on cherche un coefficient Γ tel que $\tau_s + \tau_b = \Gamma \cdot \rho U^2$. Pour calculer l'inclinaison de la surface prenons une section proche du rivage de longueur Δx qui lui est perpendiculaire, de largeur l'unité et soit h et $h + \Delta S_w$ les profondeurs d'eau aux extrémités du segment Δx :



ΔS_w est l'inclinaison de la surface libre due à la contrainte du vent et de celle sur le fond. Les 2 contraintes sont de même sens car on suppose que le vent induit un courant de retour proche du fond pour vérifier la

conservation de la masse quand l'équilibre est atteint. Exprimons alors cet équilibre mécanique de cette tranche d'eau de mer ; soit :

$$\tau_s \cdot \Delta x + \tau_b \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \rho g h^2 - \frac{1}{2} \rho g (h + \Delta S_w)^2 = 0$$

et $\tau_s + \tau_b = \Gamma \cdot \rho U^2$ alors :

$$\Delta S_w = h \cdot \left\{ \sqrt{1 + \frac{2\Gamma U^2 \Delta x}{gh^2}} - 1 \right\} \quad (36)$$

Si le vent souffle sous un angle θ par rapport à la direction x , la contrainte qui agit effectivement est donnée par :

$$(\tau_s + \tau_b) \cos \theta = \Gamma \cdot \rho U^2 \cos \theta = \Gamma \cdot \rho U U_x$$

où U_x est la composante du vent dans la direction x (perpendiculaire au rivage) ; on obtient alors :

$$\Delta S_w = h \cdot \left\{ \sqrt{1 + \frac{2\Gamma U U_x \Delta x}{gh^2}} - 1 \right\} \quad (37)$$

Pour effectuer les calculs et les initiés : le profil du rivage est subdivisé en un certain nombre de segments (pas nécessairement égaux) de longueur disons Δx où on a une profondeur à peu près constante h mesurée par rapport à SML. Pour une répartition du vent à un instant donné qu'on détermine sur chaque segment la valeur moyenne de $U U_x$ on calcule la nouvelle profondeur par $h + \sum \Delta S_w$ où $\sum \Delta S_w$ est la valeur cumulée de la variation du plan d'eau pour les segments précédents (En commence les calculs à partir de l'eau profonde ou bien au bord de la tempête (sa limite).

On peut utiliser ce type de modèle (notre équation) pour une baie qui n'a pas une forme régulière par exemple.

- **Élévation sous l'effet de la force de Coriolis :**

L'accélération de Coriolis cause une déviation vers la droite (dans l'hémisphère nord) des eaux en mouvements, perpendiculairement à la direction du mouvement. Si cette déflexion est contraincée, par exemple par la présence d'un rivage et si ce courant coule le long d'une côte à sa droite (exemple : sur les cotes atlantiques Marocaines) alors l'équilibre des force induit une élévation du niveau d'eau sur le rivage. La figure d'avant illustre pour la composante du courant V cette variation du plan d'eau; on négligent cette fois ci les frottements τ_s, τ_b ; l'équilibre de la force de Coriolis et de la force de pression s'écrit :

$$\frac{1}{2} \rho g h^2 + [2\Omega V \sin \phi] \rho g h \Delta x + \frac{1}{2} \rho g (h + \Delta S_c)^2 = 0$$

où

- $2\Omega V \sin \phi$ est la force de **Coriolis** par unité de masse

- φ est la latitude du lieu
- Ω est la vitesse de rotation de la terre ($7,28 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$)
- ΔS_c est l'élévation du niveau d'eau due à Coriolis

En négligeant les termes d'ordre élevé on obtient :

$$\Delta S_c = \frac{2\Omega}{g} V \sin \varphi \cdot \Delta x$$

Il est très difficile de pouvoir calculer analytiquement le courant V engendré par le vent. C'est **Bretschneider** (1967) qui a résolu l'équation du mouvement proche d'un rivage très long, en ne tenant compte que des contraintes du vent, sur le fond et de l'accélération qui en résulte pour obtenir une équation régissant la vitesse le long de la cote, il

propose :

$$V = U \cdot h^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{K}{14,6 \cdot n^2} \sin \theta} \quad (38)$$

où n est la **rugosité** de **Manning** ($\sim 0,035$: valeur typique), θ est l'angle entre la direction du vent et la perpendiculaire à la côte (Ox).

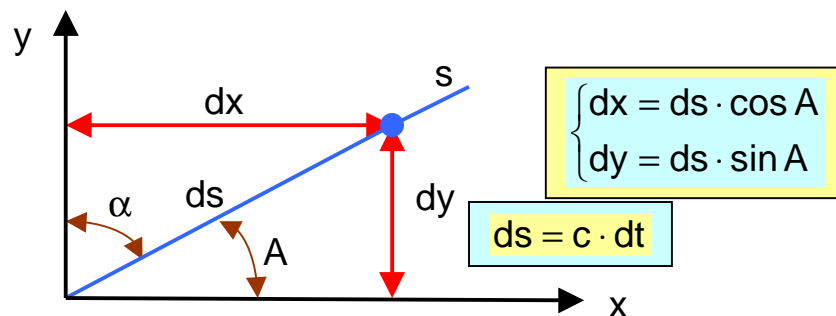
Cette équation suppose qu'il n'y a pas de courant perpendiculaire à la côte : elle est utilisable proche de la côte.

**Modèle simple pour déterminer
la propagation de la houle**

On a établi que la réfraction est régit par la loi de **Snell – Descart** qui résulte du principe de **Fermat** :

$$\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\cos A_1}{c_1} = \frac{\cos A_2}{c_2}$$

où $\alpha + A = 90^\circ$:

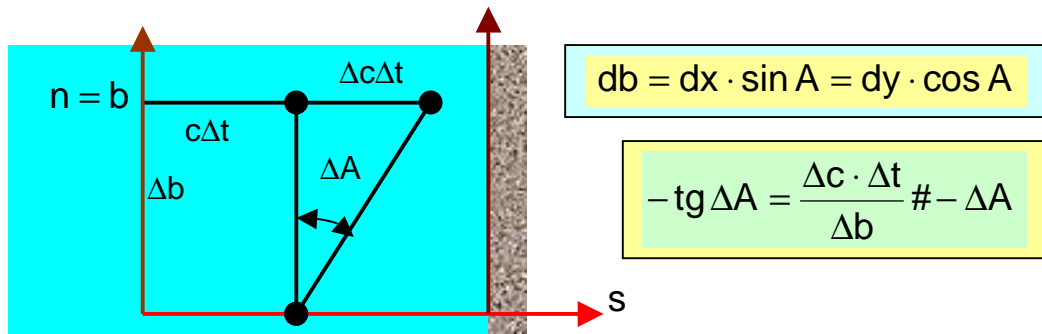


Pendant dt l'onde dont la célérité est c se déplace de ds de sorte que $ds = c dt$, qui s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{dx}{dt} = c \cdot \cos A \quad \& \quad \frac{dy}{dt} = c \cdot \sin A \quad (39)$$

s est l'abscisse curviligne le long d'une orthogonale (lieu des points qui définissent un trajet minimal de propagation d'une vague entre 2 points)

Si c augmente de Δc à une distance Δb dans la direction normale à l'orthogonale alors :



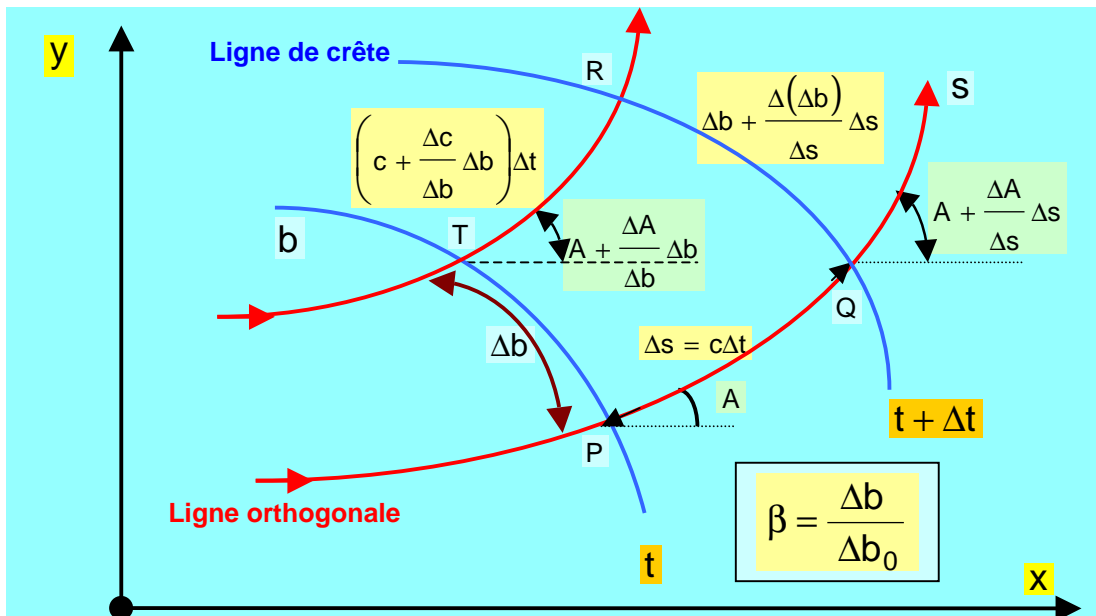
Lorsque Δb tend vers zéro on a alors :

$$\Delta A = -\frac{dc}{db} \cdot \Delta t$$

qui pour un incrément temporel très petit elle s'écrit :

$$dA = -\frac{dc}{db} \cdot dt$$

La figure suivante montre 2 orthogonales adjacentes et 2 fronts d'onde c'est – à – dire 2 lignes de crête :



b est l'abscisse curviligne le long de la ligne de crête (le front d'onde).

On a :

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{dc}{db} = -\left[\frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx}{db} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{db} \right] = \frac{\partial c}{\partial x} \sin A - \frac{\partial c}{\partial y} \cos A$$

de $ds = c dt$ on déduit que $\frac{dA}{ds} = -\frac{1}{c} \frac{dA}{dn} = -\frac{1}{c} \frac{dA}{db}$; soit :

$$K = \frac{dA}{ds} = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial c}{\partial x} \sin A - \frac{\partial c}{\partial y} \cos A \right] \quad (40) \text{ l'équation du rayon orthogonal}$$

cette équation montre que la courbure K est égale au logarithme du gradient de la célérité le long d'une ligne crête de la vague, et que

l'orthogonale s'incline vers les plus faibles célérité. Nos 3 équations qui gouvernent le cheminement des orthogonales dans le temps sont :

$$\begin{aligned} \bullet \frac{dx}{dt} &= c \cdot \cos A \quad (1) & \bullet \frac{dy}{dt} &= c \cdot \sin A \quad (41) \\ \bullet K &= \frac{dA}{ds} = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial c}{\partial x} \sin A - \frac{\partial c}{\partial y} \cos A \right] \quad (42) \end{aligned}$$

Une orthogonale est donc calculée à partir de la célérité $c = c(x, y)$ en calculant la courbure K et en extrapolant sur une petite distance le long de la courbe. Une fois K est calculée eu un point amont on l'utilise pour l'obtention de la variation d'angle que fait le rayon, au point voisin, avec l'axe des abscisses. La hauteur de houle vaut : $H = H_0 \cdot K_R K_S K_F$ (43)

• **Calcul du coefficient de réfraction :**

Pour déterminer les hauteurs de vagues le long d'une orthogonale **Munk** et **Arthur** (1952) ont dérivé de cette théorie une quatrième équation qui permet de trouver la séparation β des orthogonales :

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + p \frac{d\beta}{ds} + q\beta = 0 \quad (44)$$

où

$$\begin{cases} p(s) = -\cos A \cdot \left[\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right] - \sin A \cdot \left[\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \right] \\ q(s) = \sin^2 A \cdot \left[\frac{1}{c} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \right] - \sin 2A \cdot \left[\frac{1}{c} \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} \right] + \cos^2 A \cdot \left[\frac{1}{c} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right] \end{cases} \quad (45)$$

avec

$$\beta = \frac{B}{B_0} = \frac{\Delta b}{\Delta b_0} = \frac{\text{distance entre 2 orthogonales en eau peu profonde}}{\text{distance entre 2 orthogonales en eau profonde}} \quad (46)$$

doit être résolue (par exemple par la méthode des différences finies) pour calculer le coefficient de réfraction en n'importe quel point de l'orthogonale. Deux conditions initiales sont nécessaires :

- K_0 : courbure initiale en eau profonde est nulle.
- A l'origine : $\left. \begin{matrix} x = x_0 \\ y = y_0 \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{cases} A = A_0 \\ \beta = \beta_0 = 1 \end{cases}$

discrétisation :

$$\frac{\beta(2) - 2\beta(1) + \beta(0)}{(2\Delta s)^2} + p(1) \frac{\beta(2) - \beta(0)}{2\Delta s} + q(1)\beta(1) = 0 : \Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = c \cdot \Delta t$$

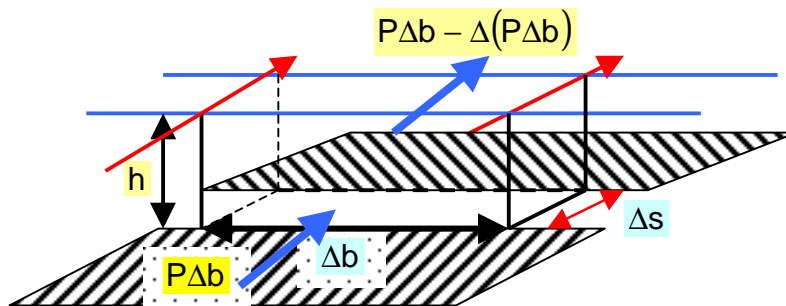
d'où
$$\beta(2) = \frac{2 \cdot \Delta s \cdot p(1) - 1}{2 \cdot \Delta s \cdot p(1) + 1} \cdot \beta(0) + \frac{2 - 4 \cdot \Delta s^2 \cdot q(1)}{1 + 2 \cdot \Delta s \cdot p(1)} \cdot \beta(1)$$
 avec

$$K_R = \sqrt{\frac{B_0}{B}} = \sqrt{\beta}$$

Ainsi les équations (1 , 2 , 3 et 4) forment un système complet d'équations différentielles pour déterminer les orthogonales et leur séparation quand la célérité $c = c(x, y)$ est connue (relation de dispersion).

• **Le frottement et l'infiltration :**

Les pertes d'énergie sont dues au frottement sur le fond et à l'infiltration d'eau due au mouvement de l'onde dans la matière semi – fluide du fond . Faisons le bilan sur l'élément de volume :



$$(P_f + P_i) \cdot \Delta b \cdot \Delta s = [P \cdot \Delta b - \Delta(P\Delta b)] - P\Delta b$$

où Δs = élément de distance le long de la trajectoire orthogonale.

h = la profondeur d'eau

P = puissance transmise à travers la section ($\Delta b \cdot h$)

En faisant tendre Δs vers zéro on obtient :

$$\frac{\partial(P \cdot \Delta b)}{\partial s} = -(P_f + P_i) \cdot \Delta b \quad (47) \quad \begin{array}{l} \text{Théorème de} \\ \Leftrightarrow \\ \text{divergence} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{div} \vec{P} + (P_f + P_i + \dots) = 0 \\ \vec{P} = E c_g \vec{e} \text{ où } \vec{e} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \end{array}$$

On définit le coefficient d'infiltration par la formule :

$$K_{fi} = \sqrt{\frac{P \cdot \Delta b}{P_0 \cdot \Delta b_0}} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \bullet P = E \cdot c_g = E \cdot nc \\ \bullet P_0 = E_0 c_{g0} = E_0 n_0 c_0 = \frac{\rho g^2 T H_0^2}{32\pi} \end{array}$$

reportons cette définition dans l'équation (5), on obtient :

$$P_0 \Delta b_0 \frac{dK_{fi}^2}{ds} = -(P_f + P_i) \cdot \Delta b \quad \text{ou} \quad \frac{dK_{fi}}{ds} = -\frac{1}{P_0 \Delta b_0} \frac{1}{2K_{fi}} (P_f + P_i) \cdot \Delta b$$

Putnam et Johnson (1949) [The dissipation of wave energy by bottom friction Transactions of the american geophysical union vol30 n°1] proposent :

$$P_f = \frac{4}{3} \pi^2 \frac{\rho f H^3}{T^3 \text{sh}^3 kh} \quad \& \quad P_i = \frac{4\pi^2}{v T^2} \frac{g \rho H^2}{\text{sh} 2kh}$$

- l'indice f indique le frottement & f le coefficient de frottement $\sim 0,01$
- p est le coefficient de perméabilité (loi de **Darcy**).

Dans la suite on négligera l'infiltration, on aboutit alors à :

$$\frac{dK_{fi}^{-1}}{ds} - F_i \cdot K_{fi}^{-1} = F_f \quad \text{avec}$$

- $F_i = \frac{64\pi^3}{\rho g v T^3} \cdot \frac{p \cdot K_S^2}{sh^2 kh}$
- $F_f = \frac{64\pi^3}{3g^2 T^4} \cdot \frac{f \cdot H_0 \cdot K_R \cdot K_S^3}{sh^3 kh}$

Notre équation différentielle est du 1^{er} ordre linéaire dont la solution est :

$$K_{fi}^{-1} = \left[\int F_f \exp(-F_i) ds \right] \cdot \exp \int F_i ds$$

Si on néglige l'effet d'infiltration ($F_i = 0$) et on remplace l'intégrale

indéfinie par une définie, on obtient : $K_{fi} = K_F = \left[1 + \int_0^s F_f ds \right]^{-1}$

On peut approximer l'intégrale par une somme sur plusieurs intervalles $\Delta s = c \Delta t$, on obtient finalement l'expression suivante pour le calcul du

coefficient de frottement :

$$K_F = \left[1 + \sum_{t=\Delta t}^{t=T+\Delta t} \frac{20,53 f H_0 K_R K_S^3}{g T^4 sh^3 kh} \cdot c \Delta t \right]^{-1}$$

On a donné par ailleurs le coefficient de frottement f qui est en général de l'ordre de 0,01 (il varie avec la nature des matériaux du fond marin).

Pour déterminer l'amplitude de la houle en un point on utilise :

$$H \cdot H_0^{-1} = K_R \cdot K_S \cdot K_F$$

A la suite de ce calcul on doit vérifier une condition de déferlement : celui de Munk ou de **Weggel** par exemple qui tiennent de la pente du fond... pour arrêter les calculs car le modèle n'est plus valable.

Remarque : réfraction par fond cylindrique (isobathes // et uniforme)

On a établi (équation 5) que le transfert de puissance le long d'une

orthogonale est régit par : $\frac{\partial(P \cdot \Delta b)}{\partial s} = -(P_f + P_i) \cdot \Delta b$ où s est l'abscisse

curviligne le long de cette ligne. Maintenant on néglige les pertes donc

on a : $\frac{d(P \cdot \Delta b)}{ds} = 0 \Leftrightarrow P \cdot \Delta b = \text{const}$, mais d'après la loi de **Snell** et

Descartes on a : $\frac{\sin \alpha_0}{L_0} = \frac{\sin \alpha}{L} = x = \frac{\Delta b_0}{\cos \alpha_0} = \frac{\Delta b}{\cos \alpha}$ voir figure page 5

or $P = E \cdot c_g$ & $\Delta b = \frac{\Delta b_0}{\cos \alpha_0} \cos \alpha$ d'où $P \Delta b = \left(\frac{\Delta b_0}{\cos \alpha_0} \right) E \cdot c_g \cos \alpha$ ainsi

$$\frac{d}{ds} (E \cdot c_g \cos \alpha) = 0 \Rightarrow E \cdot c_g \cos \alpha = C^{te} \quad \text{et comme} \quad E = \frac{\rho g H^2}{8} \quad \text{alors}$$

$$H^2 \cdot c_g \cos \alpha = C^{te} = H_0^2 \cdot c_{g_0} \cos \alpha_0 \quad (48)$$

Par définition le coefficient de réfraction est donné par :

- $K_R \equiv$ coefficient de réfraction $= \sqrt{\frac{B_0}{B}} = \sqrt{\frac{\Delta b_0}{\Delta b}} = \sqrt{\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}}$
- $K_S \equiv$ coefficient de levée de fond (Shoalling) $= \sqrt{\frac{c_{g_0}}{c_g}}$

on rappelle que la vitesse de groupe est : $c_g = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\text{sh} 2kh} \right) = n \cdot c$

on retrouve donc que l'amplitude est donnée par : $H = K_R \cdot K_S \cdot H_0$.

On peut écrire notre équation pour fond cylindrique pour tenir des pertes

comme suit : $\frac{d}{ds} (E \cdot c_g \cos \alpha) = \frac{d(F_x)}{ds} = -E_{fr} - E_i - E_b \quad (49)$

E_{fr} , E_i et E_b sont respectivement les pertes d'énergie par frottement, par infiltration et par déferlement sur le fond.

Jonsson (1966 : Proc. Of the 10th intern. Conf. on Coastal Eng.) propose

pour la perte d'énergie par frottement : $E_{fr} = \frac{2}{3\pi} \rho f_w (u_m^*)^3$ où f_w est le

coefficient de dissipation d'énergie et u_m^* est la vitesse orbitale proche du

fond qui vaut en théorie linéaire : $u_m^* = \frac{\pi H}{T \text{sh} kh}$. En effet : $\tau_b = \frac{1}{2} f_w \rho u^2 \Rightarrow$

$$E_{fr} = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} f_w \rho |u^3| = \frac{1}{2} f_w \rho |u_m^{*3} \cos^3 \omega t| = \frac{1}{2} \rho f_w \left(\frac{4}{3\pi} u_m^{*3} \right) (\text{J/s} \cdot \text{m}^2)$$

Thornton et **Guza** [1983: J. of Geoph. Res.,88 (C10)] proposent la

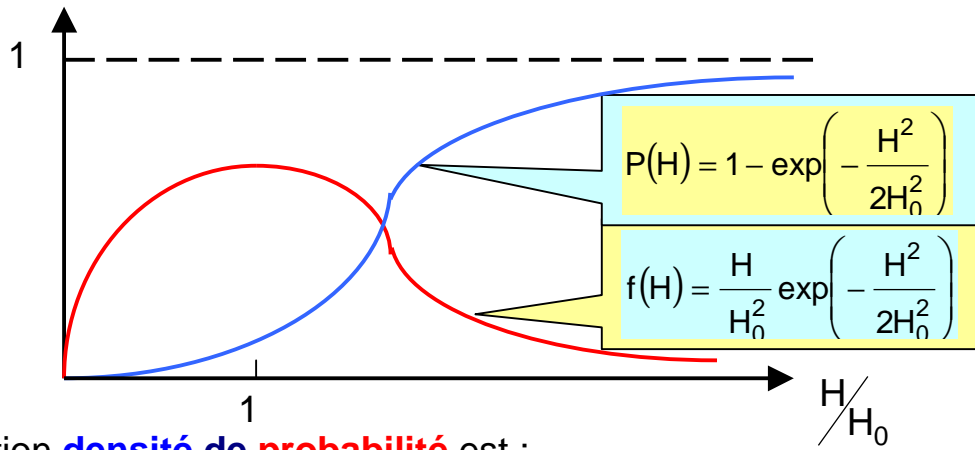
formule: $E_{fr} = \rho C_f u^3 = \frac{\rho C_f}{16} \sqrt{\pi} \left(\frac{2\pi H_{rms}}{T \text{sh} kh} \right)^3$ en suite ils ont comparé leur

modèle mathématique à des mesures ils propose de négliger la perte par frottement vis – à – vis des pertes par déferlement dans la zone du déferlement.

- **Pertes d'énergie dans le déferlement :**

On propose la Battjes (1972 Proc. Conf. on Coastal Eng.) est basée sur une valeur limite de l'amplitude compatible avec la profondeur d'eau :

$H(s) = \gamma \cdot h(s)$. **Battjes** et **Janssen** (1978 Proc. Of the 18th conf. on Coastal Eng.) ont présenté un modèle qui prévoit la dissipation par déferlement de la houle irrégulière proche de la côte en adoptant une distribution des amplitudes suivant une loi de **Rayleigh** :



La fonction **densité de probabilité** est :

$$f(H) = \frac{H}{H_0^2} e^{-\frac{H^2}{2H_0^2}} \quad \text{avec} \quad p(H < \underline{H} < H + dH) = f(H)dH = \frac{H \cdot dH}{H_0^2} e^{-\frac{H^2}{2H_0^2}}$$

La probabilité pour que le creux \underline{H} soit inférieur à H est :

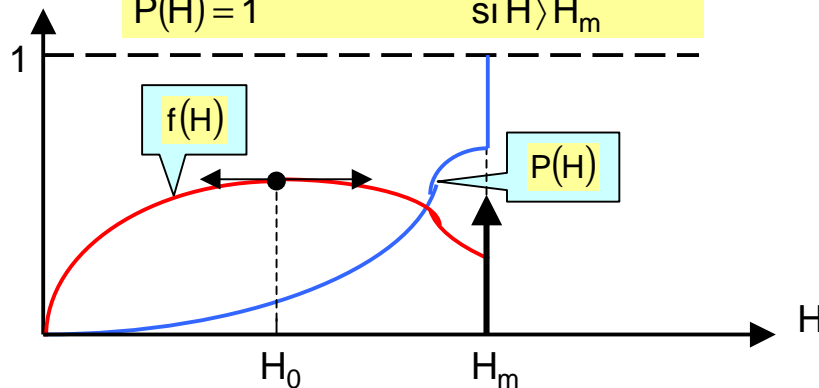
$$P(H) = p(\underline{H} < H) = 1 - e^{-\frac{H^2}{2H_0^2}}$$

où H_0 est le creux le plus probable : $f(H) < f(H_0)$.

Battjes et Janssen (1978) définissent en H_m l'amplitude maximale compatible la profondeur d'eau. La loi de probabilité est une troncature de celle de **Rayleigh** :

$$P(H) = 1 - \exp\left(-\frac{H^2}{2H_0^2}\right) \quad \text{si } H > H_m$$

$$P(H) = 1 \quad \text{si } H < H_m$$



Le taux de vagues déferlant ou ayant déferlées, noté Q_b , est associé à

cette formule par la relation : $Q_b = 1 - P(H_m) = e^{-\frac{H_m^2}{2H_0^2}} \quad (50)$

La hauteur quadratique moyenne est définie par :

$$H_{rms}^2 = \int_0^\infty H^2 dF(H) = 2(1 - Q_b) \cdot H_0^2 \quad (51)$$

En remplaçant cette valeur de Q_b dans l'équation précédente, on obtient l'équation qui nous servira pour déterminer la valeur de Q_b en fonction

$$\text{de } H_{rms} \text{ \& } H_m : \frac{Q_b - 1}{\text{Log}_e Q_b} = \left(\frac{H_{rms}}{H_m} \right)^2 \text{ on a : } \begin{cases} \text{limite } Q_b = 1 \\ \frac{H_{rms}}{H_0} \rightarrow 1 \\ \text{limite } Q_b = 0 \\ \frac{H_{rms}}{H_0} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (52)$$

Pour l'estimation de H_m , **Battjes** et **Janssen** (1978) se basent sur le

critère de **Miche** (1944) valable en profondeur finie: $\frac{H_m}{L} = 0,14 \cdot \text{th} \left(\frac{2\pi h}{L} \right)$

On peut y introduire un coefficient γ ajustable :

$$H_m = \frac{0,88}{2\pi} \cdot L \cdot \text{th} \left(\frac{\gamma}{0,88} \cdot \frac{2\pi h}{L} \right) \text{ avec } \gamma = 0,5 + 0,4 \cdot \text{th} \left(33 \frac{H_0}{L_0} \right) \quad (53)$$

La perte de puissance dans le déferlement s'exprime par une relation inspirée de la formule de **J.J. Stoker** (1957 : Water Waves Interscience New – York) et de B. Le Méhauthé (1962 Proc. Of the 18th Conf. Coastal Eng. New - York). Cette formule est inspirée des formules de perte de

charge dans un ressaut hydraulique : $E_b = \frac{1}{4T} \rho g \cdot H_m^2 \text{ (W / m}^2\text{)}$

Qui s'écrit pour une houle irrégulière sous la forme:

$$E_b = \frac{\alpha}{4} \rho g \cdot \frac{1}{T} \cdot H_m^2 \cdot Q_b$$

où α est un paramètre de l'ordre de 1 introduit par Battjes et Janssen (1978) : c'est un coefficient de calage. Dans leur article de 1985 **Battjes** & **Stive** (J. of. Geoph. Res. 90(C5)) ont présenté les résultats de ce modèle pour reproduire des mesures de laboratoire et ceux d'un cas réel (mesures en nature): Egmond Beach (Pays – Bas) : leur modèle reproduit assez bien la réalité ainsi que les résultats expérimentaux.

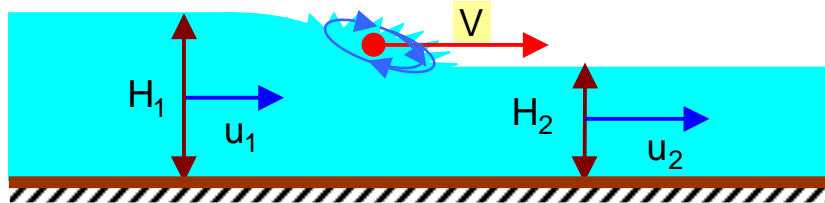
Rappel : On a vu que l'onde subit un ballonnement vers l'avant proche de la crête et par conséquent l'onde finit par déferlée. Le mouvement qui en résulte est très compliqué pour être décrit analytiquement.

Une fois l'onde commence à déferler elle le continue sous la forme d'une intumescence (bosse) turbulente dont la zone de haute turbulence a une longueur de l'ordre de la profondeur. Dans plusieurs cas, spécialement sur les plages de faible pente, cette distance est suffisamment courte que les détails sur le mouvement de cette intumescence peuvent être négligés alors des équations globales de conservation de quantité de mouvement et de continuité peuvent exister : soit

$$\bullet H_1(u_1 - V) = H_2(u_2 - V)$$

$$\bullet H_1 u_1 (u_1 - V) + \frac{1}{2} g H_1^2 = H_2 u_2 (u_2 - V) + \frac{1}{2} g H_2^2 \quad \text{où } H = \text{profondeur} = h + \eta$$

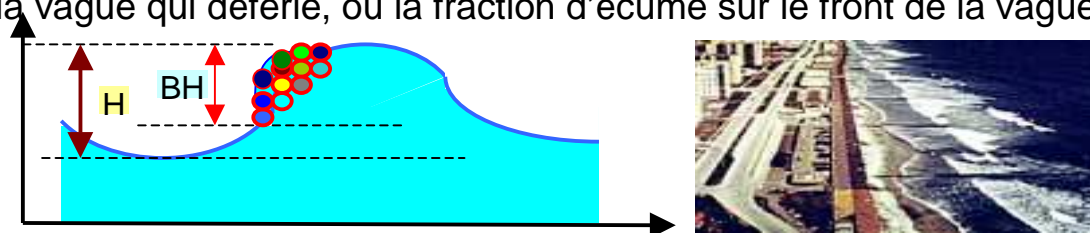
C'est 2 relations lient les vitesses et les profondeurs des 2 cotés de l'intumescence, où V est la vitesse de l'enflure. Pour des considérations thermodynamiques on doit avoir : $H_1 > H_2$ c'est - à - dire de l'énergie est dissipée au lieu d'être créée. En utilisant ses 2 relations et en regardant l'intumescence comme une discontinuité de la solution (analogue à un ressaut hydraulique). La perte de charge est donnée par :



$$\Delta H_b = \frac{(H_1 - H_2)^3}{4H_1 H_2} \quad \text{avec : } \Delta H_b > 0 \Rightarrow H_2 < H_1$$

- Une autre formule était proposée par **Thornton** et **Guza** (1983 :J. of Geoph. Res. 88 (C10)) :

Le paramètre de ce modèle noté B représente le pourcentage du creux de la vague qui déferle, ou la fraction d'écume sur le front de la vague :



En se basant sur des mesures faites à Torrey Pines Beach (Californie) pendant le mois de novembre 1978, **Thornton** et **Guza** ont calé leur nouvelle loi de **Rayleigh** $P_b(H) \equiv W(H) \cdot P(H)$ comme suit :

avec $W(H) = \int_0^{\infty} P_b(H) dH$ tel que :

- $W(H) < 1$ pour assurer : $P_b(H) < P(H)$
- $W(H) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow \infty$
- $W(H) \rightarrow 1$ quand $h \rightarrow 0$

Ils ont adopté la formule :

$$W(H) \equiv \left(\frac{H_{rms}}{\gamma \cdot h} \right)^n$$

où n et γ sont les paramètres à déterminer par le calage avec les mesures en nature. Ayant testé cette formule à Soldiers Beach puis à Torrey Pines Beach en 1978, ils proposent : $\gamma = 0,42$ et $n = 4$

La formule de la perte d'énergie dans le déferlement est donnée par :

$E_b = \int_0^{\infty} \varepsilon_b \cdot P_b(H) dH$ avec $\varepsilon_b = \frac{1}{4T} \rho g \frac{(BH)^3}{h}$ Ils ont aboutit à la formule

suivante qu'elle ont utilisé dans leur modèle: $E_b = \frac{3\sqrt{\pi}}{16T} \rho g \frac{B^3}{\gamma^4 h^5} H_{rms}^7$ (54)

En 1986 ils ont tester cette formule sur mesures faites à Leadbetter Beach en tenant que de la perte d'énergie par le déferlement dans le modèle et par le calage ils ont obtenu pour le coefficient B la valeur 1.

- **Barailler** (1986 : Note Technique **SOGREA** NT2132) propose de prendre une formule plus générale :

$$E_b = -\frac{d(F_x)}{ds} = -\frac{d}{ds} (E \cdot c_{g_x}) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\rho g H_{rms}^2}{8} \cdot c_g \cos \alpha \right)$$

Qui en eau peu profonde se simplifie, en prenant : $H_m = \gamma \cdot h$, $c_g = \sqrt{gh}$

et $\cos \alpha \approx 1$, en : $E_b = \frac{5}{16} \rho \gamma^2 g^{3/2} h^{3/2} \frac{dh}{ds}$

On houle irrégulière on adopte : $E_b = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\rho g H_m^2}{8} \cdot c_g \cos \alpha \right) \cdot Q_b$

N.B. : Amortissement des ondes de gravités

[**L. Landau** et **E. Lifchitz** : Mécanique Des Fluides tome6 p131]

Il ont démontré qu'en théorie linéaire en eau profonde :

que si $L^2 \cdot \omega \gg \nu$ & $H \ll L$ alors le **coefficient d'amortissement** d'une onde de gravité, qui n'est amortie que dans une couche de surface, est donné par :

$$\gamma \equiv \frac{1}{2 \overline{E_m}} \left| \frac{d \overline{E_m}}{dt} \right| = 2\nu k^2 = \frac{2\nu \omega^4}{g^2} \Rightarrow \overline{E_m} = \overline{E_c} + \overline{E_p} = \text{Const} \cdot e^{-2\gamma t}$$

car dans ce cas la relation de dispersion est donnée par : $\omega^2 = gk$.

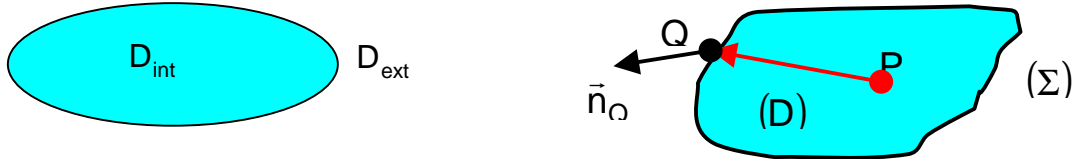
On signale qu'on a $\overline{E_c} = \overline{E_p}$ d'après le théorème d'équipartition d'énergie qui n'est valable qu'en théorie linéaire (petite amplitude) :

Tout système mécanique animé de petites oscillations les valeurs moyennes de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle sont égales.

Les grands longueurs d'onde sont moins amortis que les courtes. Comme l'énergie est proportionnelle à l'amplitude au carré :

$$\overline{E_m} = \frac{\rho g H^2}{8} \text{ alors } H = \frac{C^{te}}{\rho g} \cdot e^{-\gamma t} \text{ c - à - d } \gamma = -\frac{1}{H} \frac{dH}{dt}$$

Formulation intégrale de la Résonance Portuaire
Wave – induced oscillations in harbors of arbitrary geometry
 Par JIN – LEE J. Fluid Mech. (1971) vol45 pp.375 – 394



On a établi la représentation intégrale du potentiel de vitesse :

$$C \cdot \varphi(P) = \oint_{\Sigma} \chi(P, Q) \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial n_Q} dS_Q - \oint_{\Sigma} \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \chi(P, Q) dS_Q$$

$$C = \begin{cases} 4\pi & \text{si } P \in D \\ 2\pi & \text{si } P \in \Sigma \\ 0 & \text{si } P \in \bar{D} \end{cases}$$

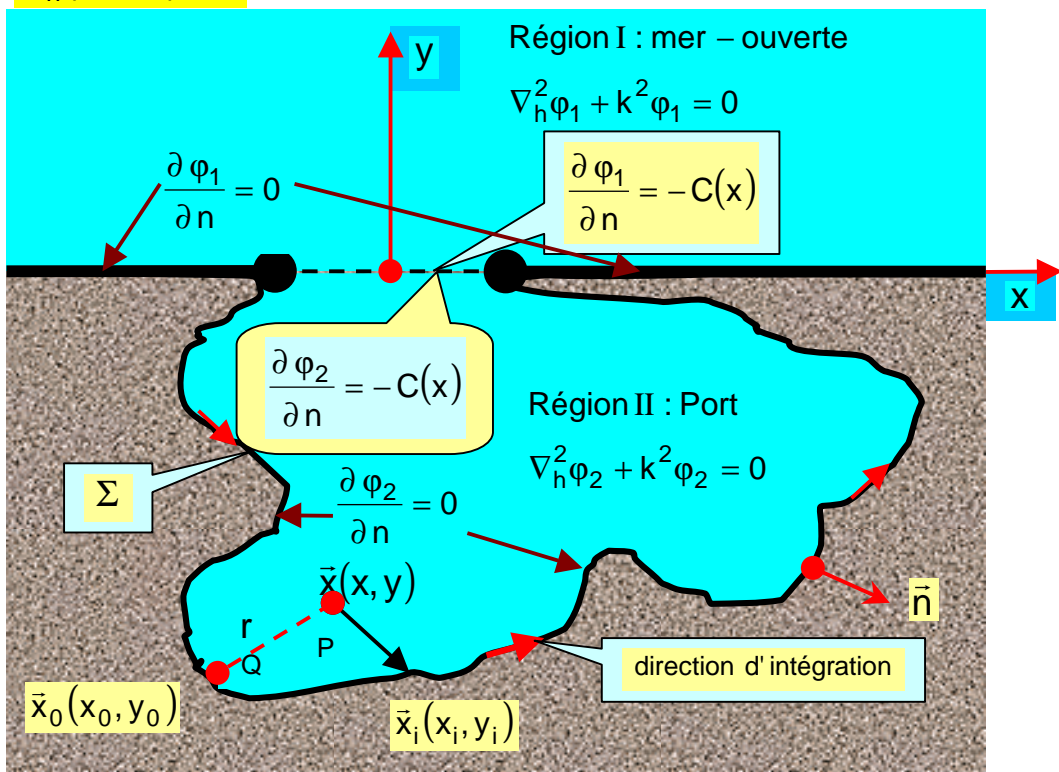
C'est la 3^{ème} identité de Green (voir ch01 pp 39).

On va appliquer ce formalisme mathématique pour déterminer les modes propres (naturels) d'un bassin portuaire de géométrie quelconque. Pour cela on choisira pour potentiel de vitesse la représentation :

$$\Phi = \frac{1}{i\omega} \frac{A \cdot g \cdot \text{ch}k(z+h)}{\text{ch}kh} \varphi(x, y) \exp(-i\omega t) \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \vec{\text{grad}} \Phi$$

Dans Lee $\varphi \equiv f$: elle vérifie évidemment l'équation d'**Helmholtz** :

$$\nabla_h^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad \text{qui résulte de l'incompressibilité } \text{div} \vec{v} \equiv 0$$



On a subdivisé le domaine fluide en 2 zones (voir figure); choisissant la fonction de Hankel de premier espèce et d'ordre zéro : $H_0^{(1)}(kr) = \chi(P, Q)$

où $r^2 = x^2 + y^2$ comme solution fondamentale de l'équation d'**Helmholtz** à deux dimensions.

N.B. : **Justification**

En effet on cherche une solution de l'équation **Helmholtz** $\Delta G + k^2 G = 0$ de la forme $G = R(r)\Theta(\theta)$ (séparation des variables) soit donc :

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta}\right)R = 0 \Rightarrow \left(r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + k^2 r^2\right) + \left(\frac{\Theta''}{\Theta}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{et } \begin{cases} r^2 R'' + rR' + (k^2 r^2 - \alpha^2)R = 0 \\ \Theta'' + \alpha^2 \Theta = 0 \end{cases}$$

où α est une constante.

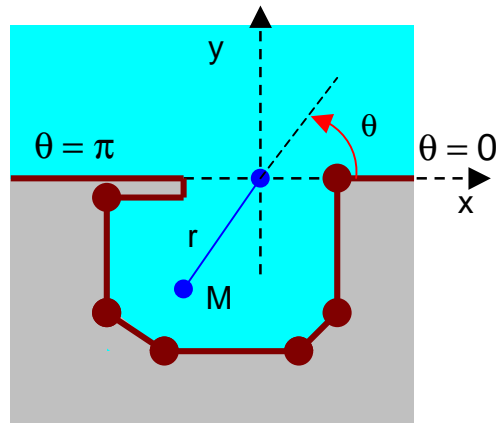
Les conditions aux limites sur la partie rectiligne Ox de $\partial G / \partial y = 0$ [sauf sur la passe portuaire où $\partial G / \partial y = C(x)$] or on a :

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} \text{ or } \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = 0 \text{ pour } \theta = 0 \text{ et } \theta = \pi$$

soit :

$$\begin{aligned} \Theta &= \cos \theta \text{ car } \Theta'' + \alpha^2 \Theta = 0 \Rightarrow \\ \Theta &= A \exp i\alpha\theta + B \exp -i\alpha\theta \end{aligned}$$



- **La condition** :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = 0 \text{ pour } \theta = 0 \Rightarrow A = B \Rightarrow \Theta = A(\exp i\alpha\theta + \exp -i\alpha\theta)$$

- **et la condition** :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = 0 \text{ pour } \theta = \pi \Rightarrow A = B \Rightarrow \exp(2i\alpha\pi) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha\pi = 1 \\ \sin 2\alpha\pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = n$$

Si on prend $\alpha = 1$ on ne perd pas de généralité alors : $\Theta = \cos n\theta = \cos \theta$ d'où : $r^2 R'' + rR' + (k^2 r^2 - 1)R = 0$ qui est satisfaite par la fonction de

Hankel comme solution : $G = H_0^{(1)}(kr)$. On pose $G = -i/4 H_0^{(1)}\{kr(p,q)\}$ de sorte qu'on a : $(\Delta + k^2) G_k(p,q) = \delta(p,q)$ où $\delta(p,q)$ = distribution de **Dirac**. On peut alors exprimer la solution $\varphi_2(\vec{x})$ à l'intérieur du port, en utilisant notre identité de **Green**, par :

$$\varphi_2(P) = -\frac{1}{4} i \cdot \oint_{\Sigma} \left\{ \varphi_2(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial \varphi_2(Q)}{\partial n_Q} \right\} dS_Q$$

$$\varphi_2(\vec{x}) = -\frac{1}{4} i \cdot \oint_{\Sigma} \left\{ \varphi_2(\vec{x}_0) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial \varphi_2(\vec{x}_0)}{\partial n} \right\} d\Sigma(\vec{x}_0)$$

car $\vec{OP} = \vec{x}(x, y)$, $\vec{OQ} = \vec{x}_0(x_0, y_0)$, $\vec{r} = \vec{QP}$, $r = \|\vec{r}\| = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ et n est la coordonnée normale extérieure à la limite du domaine portuaire. On constate que la solution dans le havre est déterminée en fonction de $\partial \varphi_2 / \partial n$ à la passe du port ; on a par continuité :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \& \quad \partial \varphi_1 / \partial n = -\partial \varphi_2 / \partial n = -C(x)$$

La comparaison des résultats numériques et expérimentaux est satisfaisante (voir **J. J. Lee**).

La solution φ_1 à l'extérieur du port (région I) peut s'exprimer en théorie linéaire comme :

$$\varphi_1 = \varphi_i + \varphi_r + \varphi_s$$

où φ_i représente le potentiel de vitesse de l'onde incidente, φ_r celui de l'onde réfléchie comme si la passe du port est fermée et φ_s le potentiel (of **the radiated wave**) c'est la correction de φ_r dû à la présence du port. Il est à noter que si l'onde incidente sans port est par exemple $\eta_1 = A_i \varphi_1(x, y) \exp(-i\omega t)$ alors avec la présence du havre on aura l'onde résultante :

$$\eta_1 = A_i \cdot [\varphi_i(x, y) + \varphi_r(x, y) + \varphi_s(x, y)] \cdot \exp(-i\omega t)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\varphi_i + \varphi_r + \varphi_s) = (\varphi_i + \varphi_r) \text{ où } r^2 = x^2 + y^2$$

Si l'onde incidente est périodique dont les orthogonales font un angle α avec l'axe des $-x$ on peut l'écrire sous la forme :

$$\varphi_i = \exp[ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]$$

alors que l'onde réfléchie peut s'exprimer par : $\varphi_r(x, y) = \varphi_i(x, -y)$

Rappel : Fonctions de Hankel :

$$H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + iN_p(x)$$

$$H_p^{(2)}(x) = J_p(x) - iN_p(x)$$

(à comparer avec $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$).

Où J_p est la fonction de Bessel de premier espèce d'ordre p :

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

et N_p est la fonction de Neumann (ou bien de Weber) défini par :

$$N_p(x) = Y_p(x) = \frac{\cos(\pi p)J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin \pi p}$$

La solution générale de l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

peut s'écrire "y = AJ_p(x) + BN_p(x)" c - à - d : y(x) = AJ_p(x) + BY_p(x)

Le comportement des solutions est donné par le tableau :

Fonction	Petit x	Grand x (comportement asymptotique)
J _p (x)	$\frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^p + O(x^{p+2})$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right) + O(x^{-3/2})$
N _p (x) $\begin{cases} p=0 \\ p>0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2\pi^{-1} \log_e x + O(1) \\ -\frac{\Gamma(p)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^p + O\left(\frac{1}{x^{p-1}}\right) \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right) + O(x^{-3/2})$
H _p ^{(1) ou (2)}	$\pm iN_p(x) + O(x^p)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[\pm i\left(x - \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{2}\right)\pi\right)\right] + O(x^{-3/2})$

pour le comportement asymptotique (|z| grand) on a :

$$\begin{cases} J_v(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \theta \\ Y_v(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \theta \\ H_v^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp(i\theta) \\ H_v^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp(-i\theta) \end{cases} \quad \text{avec } \theta = z - \left(v + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

+ } Voici quelques modes naturels (ou propres) des bassins :

- pour **Basin Circulaire** : les oscillations libres dans un bassin circulaire à profondeur d'eau constante nécessite la solution d'une équation d'oscillation de la surface libre qui a pour solutions des fonctions de Bessel. Les premiers modes sont donnés par :

$$\frac{R}{L} = 0,61, 1,12 \text{ et } 1,62 \dots \text{ pour bassin circulaire de rayon } R$$

les oscillations à travers un "axe - diamètre" ont lieu si :

$$R/L = 0,293, 0,849 \text{ et } 1,36 \dots$$

- pour un **bassin elliptique** d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ où a et b sont respectivement la moitié de l'axe majeur et mineur de l'ellipse, le mode propre longitudinal "clapotant" a une période résonante :

$$T = 2\pi a / \sqrt{gh} \left[\left\{ 5 + 2(b/a)^2 \right\} / \left\{ 18 + 6(b/a)^2 \right\} \right]^{0,5}$$

- pour un **bassin rectangulaire** on a vu que :

$$T = 2 / \sqrt{gh} \left[(n/a)^2 + (m/b)^2 \right]^{0,5} \quad \text{si } a \gg b \quad \text{on a alors } T \approx 2a / n\sqrt{gh}$$

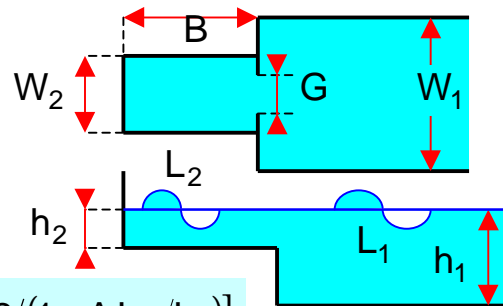
mais les ports ne sont fermés et les modes portuaires sont excités par les ondes incidentes sur la passe. Dans ce cas le mode propre est double de celui fermé pour un bassin rectangulaire très long :

$$T \approx 4a / n\sqrt{gh}$$

- pour un **bassin triangulaire** et profondeur constante : $a/L = 0,383$
- Pour un **bassin rectangulaire ouvert** Biésel et le Méhauté proposent

$$B/L_2 = (2n\pi + \beta) / 4\pi$$

$$\beta = \cos^{-1} \left[\frac{2 - \alpha_1^2 (1 + L_2 W_2 / L_1 W_1)}{2(1 - A \alpha_1^2 L_2 W_2 / L_1 W_1)^{0,5}} \right]$$



$$\text{où } \begin{cases} \alpha_1 = (G/W_2)^{0,5} (W_1/W_2)^{0,25} [2/(1 + A L_2/L_1)] \\ A = \left(1 - \frac{(4\pi h_2/L_2)}{\text{sh}(4\pi h_2/L_2)} \right) \left(1 + \frac{(4\pi h_1/L_1)}{\text{sh}(4\pi h_1/L_1)} \right)^{-1} \end{cases}$$

Dans le cas d'ondes résonantes en eau peu profonde on a donc:

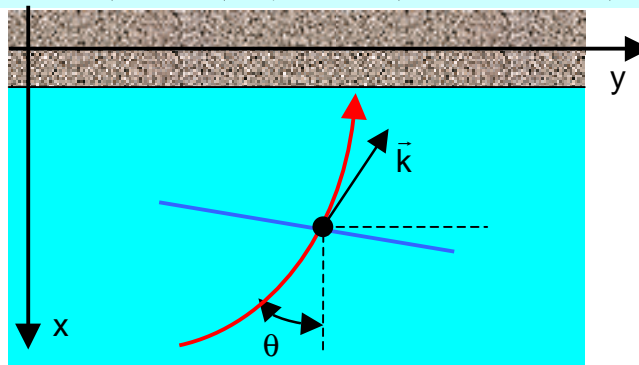
$$T_R = 4\pi B / (2n\pi + \beta) \sqrt{gh_2}$$

Modélisation de la réfraction : Un modèle mathématique a été élaboré par **Phillips** en 1966 pour étudier la réfraction de la houle comme suit :

Le vecteur d'onde \vec{k} est irrotationnel. En coordonnées cartésiennes on a

$$\cos\theta \partial \theta / \partial x + \sin\theta \partial \theta / \partial y = 1/k (\cos\theta \partial k / \partial y - \sin\theta \partial k / \partial x) \quad (55)$$

$$\omega^2 = gk \tanh k \quad (56)$$



car le vecteur d'onde est égale le gradient de la phase et le rotationnel d'un gradient est nul.

L'amplitude de l'onde est obtenue de l'équation de conservation d'énergie en régime permanent :

$$\begin{aligned} (c_g \cos \theta) \frac{2}{H} \frac{\partial H}{\partial x} + (c_g \sin \theta) \frac{2}{H} \frac{\partial H}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial c_g}{\partial x} \\ - c_g \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial c_g}{\partial y} + c_g \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Le système d'équations (1 – 2 – 3) peut être résolu numériquement par une méthode aux différences finies. La zone du surf (déferlement) sera obtenue en adoptant un critère de déferlement et dans laquelle on doit tenir compte de la dissipation d'énergie pour calculer l'amplitude H.

• **N.B. : à propos du déferlement : Les critères**

Le déferlement se produit dans les 4 situations suivantes :

- **1** - La vitesse des particules fluides à la crête de la vague devient égale à la célérité de l'onde (**critère cinématique**).
- **2** - La condition de pression nulle (origine des pressions la pression atmosphérique) en surface libre ne peut plus être satisfaite (**critère dynamique**).
- **3** - L'accélération des particules fluides, à la surface libre, devient supérieure à celle de la pesanteur (**critère dynamique**).
- **4** - Le profile de la surface libre devient vertical (**critère géométrique**).

+ **Note sur l'effet de la réfraction sur l'amplitude des vagues :**

On a établi en bathymétrie uniforme et parallèle, par la conservation de la puissance $P = (nE/T)$ entre 2 Rayons (2 Orthogonales), que :

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{c_{g0}}{c_g}} \cdot \sqrt{\frac{B_0}{B}} = \sqrt{\frac{L_0}{2nL}} \cdot \sqrt{\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}} \quad \text{où } c_g = n \cdot c \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi} \operatorname{th} \left(\frac{2\pi h}{L} \right) \\ n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{sh} 2kh} \right) \end{cases}$$

L'angle de réfraction α entre la ligne de crête et l'isobathe locale est déterminé par la loi de **Snell – Descartes** :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{L} &= \frac{\sin \alpha_0}{L_0} \\ \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} &= \frac{c_0}{c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \alpha = \left(\frac{L}{L_0} \right) \sin \alpha_0 = \operatorname{th} \left(\frac{2\pi h}{L} \right) \cdot \sin \alpha_0$$

le coefficient de réfraction K_R est donc donné par : $K_R = \sqrt{\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}}$

En réalité les isobathes sont rarement rectilignes, on observe généralement une successions de convergences et de divergences

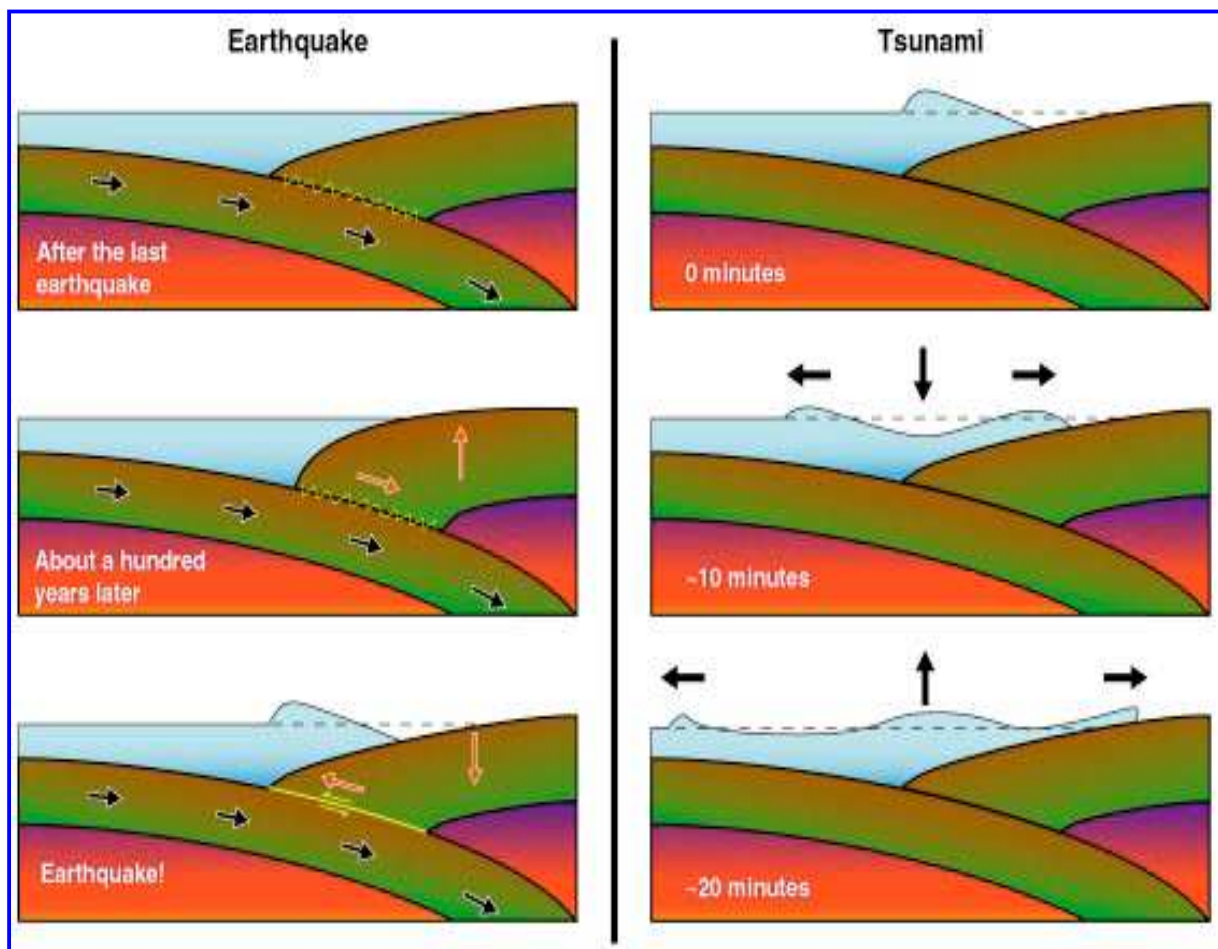
entre les orthogonales (les rayons). C'est pour cela que **Dorrestein** (1960 Journal of Géophysical Res. N°65 pp637 - 642) a conçu une méthode pour déterminer manuellement la réfraction lorsque les isobathes ne sont plus rectilignes.

Si α'_1 et α'_2 sont les angles aux points où on veut déterminer la réfraction de 2 rayons consécutifs dont les angles d'incidence en eau profonde sont α_1 et α_2 , dans ce cas selon **Dorrestein** le coefficient de réfraction

est égal à :

$$K_R = \sqrt{\frac{c_0}{c} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha'_1 - \alpha'_2} \right)} = \sqrt{\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha'_1 - \alpha'_2} \right)}$$

ceci sous l'hypothèse d'une distribution de l'énergie des vagues à peu près uniforme dans la gamme des azimuts compris entre α'_1 et α'_2 .



Définition : en optique et en mathématique, une **caustique** est l'enveloppe des rayons lumineux subissant une **réflexion** ou une **réfraction** sur une surface ou une courbe. Une caustique par réflexion est aussi appelée **catacaustique**, tandis qu'une caustique par réfraction est appelée **diacaustique**.

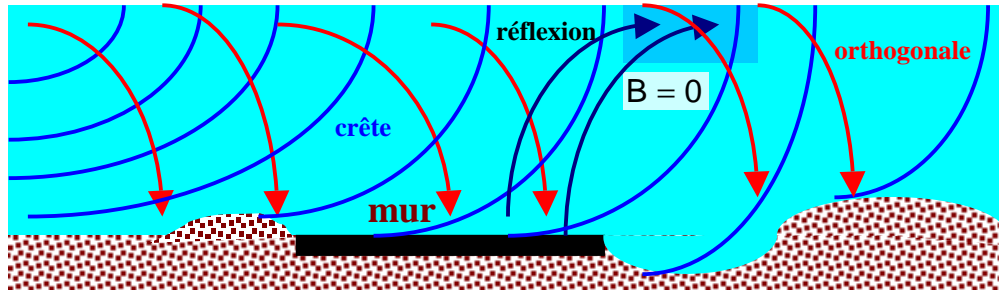
Complément

Le comportement de la houle proche d'une caustique

C1 : formulation du problème :

Une caustique est la zone où l'énergie est concentrée : théoriquement l'amplitude y est infinie :

Zone de Caustique (caustic)



Avant d'aborder le problème des caustiques on va présenter la physique de la réfraction par une approche analogique en optique géométrique ! ?. On sait que la propagation d'une onde de gravité en théorie linéaire dans un fluide incompressible dont la surface libre n'est soumise à aucune perturbation de la pression atmosphérique, dont l'écoulement est par hypothèse irrotationnel, ce problème est régi par le système

$$d'équations : \begin{cases} \Phi_{x^+x^+} + \Phi_{y^+y^+} + \Phi_{z^+z^+} = 0 & \text{pour } 0 > z^+ > -h^+(x^+, y^+) \\ \Phi_{t^+t^+} + g\Phi_{z^+} = 0 & \text{en } z^+ = 0 \\ \Phi_{z^+} + h_{x^+}^+ \Phi_{x^+} + h_{y^+}^+ \Phi_{y^+} = 0 & \text{en } z^+ = -h^+(x^+, y^+) \end{cases}$$

En introduisant les grandeurs sans dimensions (x, y, z, t, Φ, h...) :

$$\begin{aligned} \bullet \quad & x^+ = L \cdot x \quad , \quad y^+ = L \cdot y \quad , \quad z^+ = H \cdot z \\ \bullet \quad & t^+ = t \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \quad , \quad \Phi^+ = L^2 \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \Phi \quad \text{et} \quad h^+ = H \cdot h \end{aligned}$$

Supposons que : $\Phi = \exp(i\omega^+t^+) \phi(x, y, z, t) = \exp(i\omega t) \phi(x, y, z, t)$

Où L est l'échelle de variation sur l'horizontale et H sur la verticale; on a :

$\omega = \omega^+ \sqrt{L/g}$. Notre système en variables adimensionnelles s'écrit :

$$\begin{cases} \phi_{xx} + \phi_{yy} + \varepsilon^{-2} \phi_{zz} = 0 & \text{pour } 0 > z > -h \\ \phi_z = \varepsilon M \phi & \text{en } z = 0 \\ \varepsilon^{-2} \phi_z + h_x \phi_x + h_z \phi_z = 0 & \text{en } z = -h \end{cases} \quad (58) \quad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{H}{L} \quad \text{et} \quad M = \omega^2$$

La théorie de l'optique géométrique est basée sur le fait que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon M = \text{une valeur finie et positif}$$

Admettons que pour des valeurs petites de ε le potentiel φ admet le comportement asymptotique :

$$\phi = \sum_{j=1}^N \text{ch}[n(z+h)] \exp(i\varepsilon^{-1}S_j) [A_j + O(\varepsilon)] \quad (59)$$

où n , A_j et S_j sont fonctions de x et y . Chaque terme dans la solution vérifie le système d'équations.

N.B. : Sans perte de généralité ça revient au même de supposer que $\varepsilon M = 1$ et de faire le développement asymptotique en M . On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{\nabla}S)^2 = n^2 \\ n \text{ thnh} = 1 \\ \vec{\nabla}S \cdot \vec{\nabla} [A^2(\text{sh}^2(nh) + h)] + [A^2(\text{sh}^2(nh) + h)] \nabla^2 S = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} (60a) \\ (60b) \text{ où } \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ (60c) \end{array} \right.$$

où on a laissé tomber l'indice j . $(\vec{\nabla}S)^2 = n^2$ l'équation eiconale de l'optique géométrique dont les caractéristiques sont les orthogonales (rayons) qui sont perpendiculaires au front d'onde $S(x, y) = \text{constante}$ (par exemple les lignes de crête), ces rayons sont gouvernés par : S est nommé la **fonction de phase** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{d\sigma^2} = \frac{\partial(n^2/2)}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{d\sigma^2} = \frac{\partial(n^2/2)}{\partial y} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (61a) \\ (61b) \end{array} \quad \& \quad \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma} \right)^2 = n^2 \quad (61c)$$

où σ est un paramètre. Le long d'une orthogonale la relation :

$$A^2 \left[(\text{sh}^2(nh) + h) \right] n \cdot d\tau = \text{constante} \quad (62) \text{ est vérifiée}$$

où $d\tau$ est l'espacement entre 2 orthogonales consécutives.

D'après cette équation l'amplitude A devient infinie quand $h \rightarrow 0$ ou $d\tau \rightarrow 0$. Le premier cas correspond à la côte et le deuxième à une caustique : **c'est l'enveloppe des rayons par définition**.

Considérant la convergence des rayons (orthogonales) à un front d'onde $S(x, y) = \text{constante}$ dans le sens où S est croissant. En première approximation à fin d'avoir un problème à valeur unique en S et A on peut écrire en premier (59): $\phi = A \text{ch}[n(z+h)] \exp(iMS)$ sous la forme:

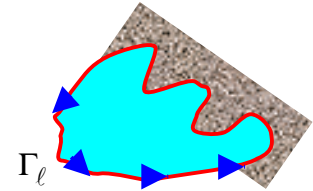
$$\phi = \text{ch}[n(z+h)] \exp(iMS - i \log_e A) \quad (63)$$

et puis imposé que ϕ soit à valeur unique. Supposant qu'une courbe fermée irréductible Γ_ℓ est tracée dans la région d'intérêt dans le sens des S croissants. Comme $\text{ch}[n(z+h)]$ est à valeur unique la solution ϕ donne alors l'accroissement de $\log_e \phi$ autour de Γ_ℓ par :

$$\partial \log_e \phi = M \oint_{\Gamma_\ell} \vec{\nabla} S \cdot d\vec{s} - \frac{1}{2} m_\ell \pi - 2n_\ell \pi \quad (64)$$

où $d\vec{s}$ est un vecteur élémentaire de l'arc Γ_ℓ , m_ℓ le nombre total de fois que Γ_ℓ traverse la ligne de côte ou une caustique, et n_ℓ est un nombre entier positif. Par la condition d'existence d'une valeur unique de ϕ , $\partial \log_e \phi = 0$, il résulte que:

$$M \oint_{\Gamma_\ell} \vec{\nabla} S \cdot d\vec{s} = 2n_\ell \pi + \frac{1}{2} m_\ell \pi = 2\pi \left(n_\ell + \frac{m_\ell}{4} \right) \quad (65)$$



cette relation est utilisable pour déterminer le spectre.

C2 : Analyse spectrale 2D d'un liquide homogène confiné :

• Canal bidimensionnel :

Soit un canal 2D limité latéralement par deux parois verticales $y = 0$ et $y = b > 0$, et un fond $z^+ = -h^+(x^+) = -L \cdot f(x)$ où $f(x) > 0$. Il résulte des

$$\begin{cases} n \operatorname{th} [nMf(x)] = 1 & (66) \\ \frac{dy}{dx} = \pm c(n^2 - c^2)^{-1/2} & (67) \end{cases}$$

équations (60) et (61) que :

où c est une constante.

Ces 2 équations déterminent $n = n(x, M)$ fonction de la position x , du paramètre M et de la pente du rayon (orthogonale). Il est à remarquer que dy/dx change de signe quand un rayon rencontre une courbe limite de région d'onde. On ne perde pas de généralité en prenant $0 \leq c \leq \infty$ et en désignant chaque orthogonales par une valeur de c . D'après la 1^{ère} équation du système (60) $(\vec{\nabla} S)^2 = n^2$ et (67) la fonction phase S est

donnée par : $S = \pm \int_x n^2 (n^2 - c^2)^{-1/2} dx + \text{constante}$. Qu'on peut exprimer sous la forme suivante par intégration par partie :

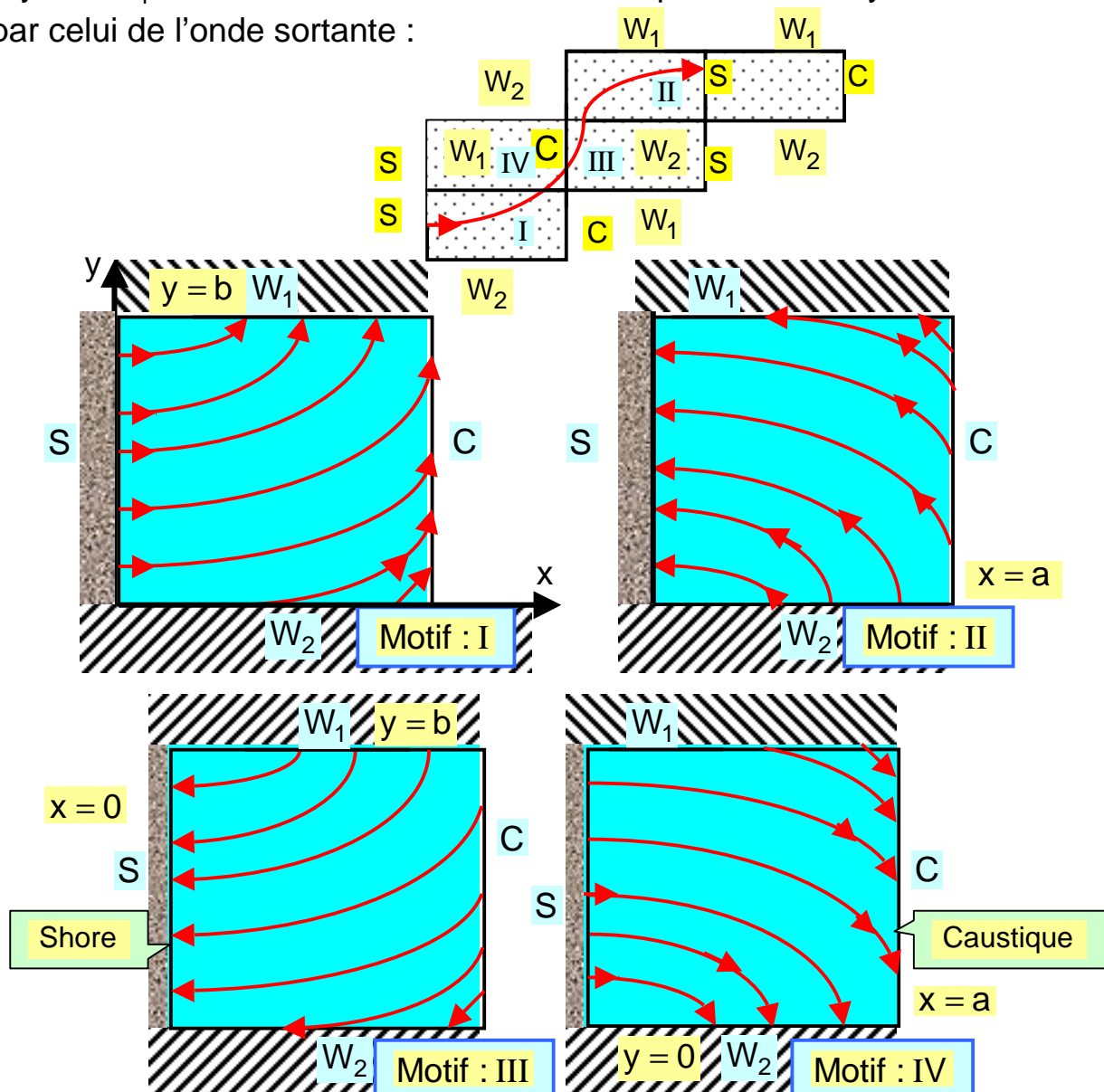
$$S = \pm \int_x (n^2 - c^2)^{1/2} dx \pm cy + \text{constante} \quad (68)$$

cependant les équations (67) et (68) n'ont de sens que si $n > c$.

En $n = c$ on a d'après (67) : $\frac{dy}{dx} = \pm \infty$ et donc les rayons désignés par c

sont tous tangents à la ligne $x = a$ où $n = c$, qui est nommée **caustique**. Pour $n < c$ la pente de l'orthogonale (du rayon) et la fonction phase S deviennent imaginaires ; en accord avec (59) la solution ϕ admissible physiquement doit donc décroître exponentiellement pour $n < c$.

Maintenant on suppose que $h(x) = 0$ en une valeur de x par exemple en $x = 0$. L'équation (60b) implique limite $n^2 h = 1$ quand $x \rightarrow 0$ c – à – d que $n = O(h^{-1/2})$ proche de $x = 0$ et d'après (67) il résulte que $dy/dx = 0$ en $x = 0$. Par conséquent les rayons forment des cornes (cusps) à la ligne de côte (le rivage) et par conséquent la ligne de côte est également une enveloppe des fronts d'onde, qui sont perpendiculaires aux rayons. La représentation par l'intégrale (68) devient non valable à la ligne de côte. On admettra pourtant que n reste intégrable à la ligne de côte de tel sorte que S est finie en $h = 0$. On considère une région d'onde correspondant à une valeur de c , qui est limitée par : une ligne de côte $x = 0$, une caustique en $x = a > 0$ et par 2 murs, où $c = n(a, M)$. Soit un rayon S qui émerge de la ligne de côte et qui rencontre le mur $W_1 : y = b$ puisque l'angle de l'onde réfléchi et incidente sont égaux, la pente du rayon à W_1 doit être continu si on continue le parcours du rayon incident par celui de l'onde sortante :



A la caustique **C** en $x = a$ le rayon a un point d'inflexion si on le prolonge par le motif III. Après que le rayon a traversé le mur $W_2 : y = 0$ et rencontre la limite $x = 0$ son motif est II, le rayon émerge de la ligne de côte avec la même direction que sur le motif I.

N.B. : Une caustique est par définition l'enveloppe d'une famille d'orthogonales. Or les ondes de gravité se réfractent en 2D, la caustique est une certaine courbe dans le plan xy définie par $C(x, y) = 0$.

On a alors que 4 motifs (solutions harmoniques) correspondant à la valeur de c et donc $N = 4$. L'espace gouvernant consiste en 4 motifs et on construit ainsi 4 fonctions de phase S_j avec $j = 1, 2, 3$ et 4 qui sont des branches de S tel que $\vec{\nabla}S$ est un champ à valeur unique dans cet espace gouvernant.

Définissant :

$$S_1 = \int_0^x (n^2 - c^2)^{1/2} dx + cx = -S_3 \quad (69)$$

$$S_2 = -\int_0^x (n^2 - c^2)^{1/2} dx + cx = -S_4 \quad (70)$$

sur le motif correspondant j pour obtenir $S_1 = S_2$ et $S_3 = S_4$ en $x = 0$;
 $\vec{\nabla}S_1 = \vec{\nabla}S_2$ et $\vec{\nabla}S_3 = \vec{\nabla}S_4$ en $x = a$ & $S_1 = S_4$ et $S_2 = S_3$ en $y = 0$ en plus d'une condition en $y = b$.

On superpose ces motifs de manière que les S sont obtenus à des constantes près de sorte qu'ils sont continus aux murs et à la ligne de côte et $\vec{\nabla}S$ est continu à la caustique, on va ainsi :

- Joindre : le motif I au motif II
 - Joindre : le motif III au motif IV
- } en $x = 0$ et $x = a$
- Joindre : le motif I au motif IV
 - Joindre : le motif II au motif III
- } en $y = 0$ et $y = b$

L'espace gouvernant ainsi conçu est un espace sur lequel $\vec{\nabla}S$ est à valeur unique.

L'évaluation de (65) peut se simplifier en choisissant un chemin sur laquelle y et x sont constant. On choisira Γ_1 la courbe fermée le long de W_1 dans le sens décroissant des x pour les motifs I et IV et le long de W_1 dans la direction inverse pour les motifs II et III ; & Γ_2 est le chemin fermé le long de la caustique dans le sens des y croissants sur les motifs I et II et le long de la caustique dans le sens inverse pour les motifs III et IV. Puisque Γ_1 traverse la ligne de côte et la caustique une fois alors que Γ_2 aucune fois on a alors : $m_1 = 2$ et $m_2 = 0$. D'après (65 – 69 – 70) :

$$2M \int_0^a (n^2 - c^2)^{1/2} dx = 2\pi \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) : n_1 = 0, 1, 2, \dots \quad (71)$$

$$2Mcb = 2n_2\pi : n_2 = 0, 1, 2, \dots \quad (72)$$

où l'emplacement $x = a$ de la caustique satisfait à (66) :

$$c \operatorname{th} [cMf(a)] = 1 \quad (73)$$

La procédure de construction de l'espace de recouvrement et d'obtention des formules spectrales (71) et (72) peuvent être utilisées dans une région d'onde limitée par d'autres limites. Par exemple (71 – 72) restent inchangées si la caustique est remplacée par une ligne de côte et vis versa. Si l'une des limites est parallèle à l'axe des y ou les 2 sont des murs alors : $m_1 = 1$ ou bien $m_1 = 0$ et l'équation (72) reste valable. Ceci justifie le fait que (72) est une condition nécessaire pour avoir une région d'ondes piégées [trapped waves].

C3 : Canal illimité 2D avec une ligne de côte :

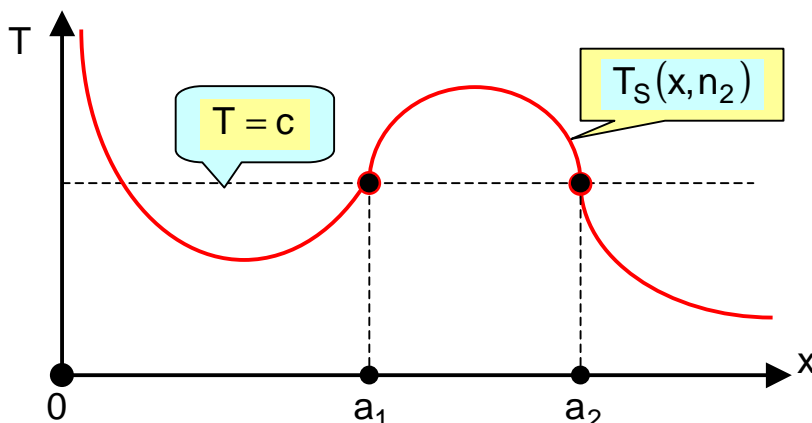
Supposons que la bathymétrie du canal est définie par $z^+ = -L \cdot f(x)$ avec $0 \leq x \leq \infty$ où $f(0) = 0$ et $f(x) > 0$ pour $0 < x < \infty$. Les 2 murs verticaux sont $y = 0$ et $y = b$. Comme (72) est une condition nécessaire pour l'obtention des formules spectrales, on peut combiner (66) et (72) pour obtenir une équation à fin de déterminer le rayon de la caustique. Notons qu'à une caustique $x = a$: $c = c(n, M)$ et par (72) on a $Mc = \frac{n_2\pi}{b}$. Il en

résulte de l'équation (66) que: $c = \operatorname{coth} \left[\frac{n_2\pi f(x)}{b} \right]$ où $n_2 = 1, 2, \dots$ (74)

En se donnant c et n_2 l'emplacement de la caustique est déterminé par la solution de (74) en x . Le membre de droite de (74) définit une famille

de courbes paramétriques : $T_S(x, n_2) = \operatorname{coth} \left[\frac{n_2\pi f(x)}{b} \right]$ (75)

qui seront désignées par les courbes spectrales (qui correspondent chacune à n_2 fixe) :



Suppose que dans le plan $T - x$ on considère une courbe spectrale $T_S(x, n_2)$ et une ligne horizontale $T = c$ où c caractérise les rayons qui détermine la solution de notre problème. L'emplacement de caustique est déterminé par l'intersection de $(T = c)$ et $T_S(x, n_2)$, les régions d'onde correspondantes sont définies par un voisinage de x tel que $T_S \geq c$. Il est à signaler qu'il n'existe pas de point d'intersection de $(T = c)$ et $T_S(x, n_2)$ si $c > \bar{m} = \text{Sup} h(x) : 0 \leq x \leq \infty$ et $c < m = \text{Inf} h(x) : 0 \leq x \leq \infty$. On peut définir une intégrale sur la famille des courbes spectrales par :

$$I(M, n_2, a_1, a_2) = 2M \int_{a_1}^{a_2} (n^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} dx \quad (76)$$

où $n(x, M)$ satisfait à (66) et (72) ; $T_S > c$ pour $0 \leq a_1 < x < a_2$ et $T_S = c$ pour $c = a_1$ et a_2 . Si a_1 et a_2 sont positifs les courbes spectrales possèdent chacune alors au plus un maximum entre a_1 et a_2 .

Puisque : limite $T_S(x, n_2) \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow 0$ d'après (75) une région d'onde peut prendre naissance proche de la ligne de côte où $a_1 = 0$.

Les valeurs discrètes de M sont obtenues en résolvant :

$$I(M, n_2, a_1, a_2) = 2M \int_{a_1}^{a_2} (n^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} dx = (2n_1 + 1)\pi \quad \begin{cases} n_1 = 0, 1, 2, \dots \\ n_2 = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (77)$$

qui peut être obtenue par la même justification pour l'obtention de (71). On va maintenant chercher une condition pour que des ondes soient piégées proche de la ligne de côte ou un maximum local d'un haut fond. Il est facile de monter que $\partial(nM)/\partial M > 0$ en utilisant (66) et $\partial I/\partial M > 0$. Par conséquent : $I(M, n_2, a_1, a_2) \geq (2k + 1)\pi$ (78) où k est un entier positif et il n'existe qu'un maximum entre a_1 et a_2 quand a_1 et $a_2 > 0$ et pas de maximum quand $a_1 = 0$, il existe alors une valeur de M^* , a_1^* et a_2^* de sorte que : $I(M^*, n_2, a_1^*, a_2^*) = (2n + 1)\pi : n_1 = 0, 1, 2, \dots [k]$ où $M^* \leq M$ et $0 \leq a_1 \leq a_1^* < a_2^* \leq a_2$ et où $[k]$ est le plus grand entier non négatif.

L'équation (78) définit une condition suffisante pour que l'onde soit piégée proche de la ligne de côte ou un maximum local du spectre et par conséquence proche d'un haut fond car les maximums du spectre et du fond ont lieu pour les mêmes x d'après l'équation (75). Une condition nécessaire pour l'apparition d'ondes piégées est manifestement $c > m$. Si $c \leq m$ on a simplement un spectre continu donné par :

$$M = \frac{n_2 \pi}{(bc)} \quad \text{pour} \quad 0 < c \leq m \quad (79)$$

Finalement on considère le cas d'une pente uniforme pour illustrer la méthode ; et comparant la solution asymptotique à la solution exacte obtenue par Ursell. Posons $f(x) = \gamma x$ pour $0 \leq x < \infty$ et $0 < \gamma \ll \infty$. Selon (75)

les courbes spectrales sont définies par: $T_S(x, n_2) = \coth \left[\frac{n_2 \pi \gamma x}{b} \right]$ (80)

On observe que $T_S(x, n_2)$ pour un n_2 donné croît de façon monotone de 0 à 1 quand x augmente de 0 à ∞ . Ainsi, pour $\infty > c > 1$ n'importe quelle ligne horizontale $T = c$ se coupera avec $T = T_S$ en un point, disons $x = a$ on peut avoir une région d'onde piégée. Les formules spectrales sont données par (71) et (72). Au moyen de l'équation (66) on obtient :

$$I(M, n_2, 0, a) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\lambda_a} (\lambda^{-2} - \lambda_a^{-2})^{\frac{1}{2}} d \left[\lambda \log_e \left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right) \right]$$

où $\lambda = n^{-1}$ et $c^2 = \lambda_a^{-2}$. On pose $\lambda = \lambda_a \sin \theta$ et en remarquant que :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin \theta} \log_e \left[\frac{1 + \lambda_a \sin \theta}{1 - \lambda_a \sin \theta} \right] d\theta = \frac{\pi}{\sin \lambda_a} \quad \text{où } \lambda_a < 1$$

il en résulte que par intégration par partie :

$$I(M, n_a, 0, a) = \frac{\pi}{\gamma \sin \lambda_a} = (2n_1 + 1)\pi \quad \text{où } \sin^{-1} \lambda_a < \pi/2 \quad (81)$$

et par l'équation (72) on a :

$$M = \left(n_2 \frac{\pi}{b} \right) \sin(2n_1 + 1)\gamma \quad \text{pour } 0 \leq n_1 < \frac{\pi}{(4\gamma)} - \frac{1}{2} \quad (82)$$

Cette formule est en accord avec celle d'**Ursell** si on remplace γ par $\text{tg}^{-1} \gamma$ car on a fait la proposition que $\gamma \rightarrow 0$ (voir Ch01 pp52). Ceci confirme l'hypothèse analogique avec la théorie d'optique géométrique. Pour $0 < c \leq 1$ aucune caustique n'est possible et la région d'onde occupe tout le canal à houle. L'espace gouvernant est un cylindre et le spectre

est continu donné par (72) : $M = \frac{n_2 \pi}{(bc)}$ pour $0 < c \leq 1$ (83)

La valeur critique de la pente du fond est déterminée par :

$$\gamma = \frac{\pi}{2(2n_1 + 1)} \quad : n_1 \gg 1 \quad (84)$$

la décroissance du spectre correspondant à une valeur donnée de n_2 a une limite égale à la **fréquence de coupure** $\left(\frac{n_2 \pi}{b} \right)$ quand $a \rightarrow \infty$.

C4 : La forme théorique de la surface libre au voisinage d'une caustique $C(x, y) = 0$ bidimensionnel :

On vient de voir que dans un canal à houle la caustique rectiligne $x = a$ ici on va voir le cas 2D : $C(x, y) = 0$. Chaque orthogonale au voisinage de la courbe d'une caustique consiste d'une part d'un rayon le long duquel la crête se propage vers la caustique, avec une continuation tangente à la caustique, et d'une part d'un rayon qui émerge de la caustique le long duquel se propage également la crête loin de la caustique :

D'un côté de la courbe de la caustique, existe 2 rayons (orthogonales) passant à travers chaque point, un entrant et l'autre sortant, ce côté est nommé : région illuminée (**illuminated region**). De l'autre côté il n'existe pas de rayons nommée : région d'ombre (**shadow region**).

Suffisamment loin de la caustique dans la zone éclairée (illuminée), l'onde résultante peut être décrite localement par la superposition de 2 systèmes d'onde longue gaufrée, soit :

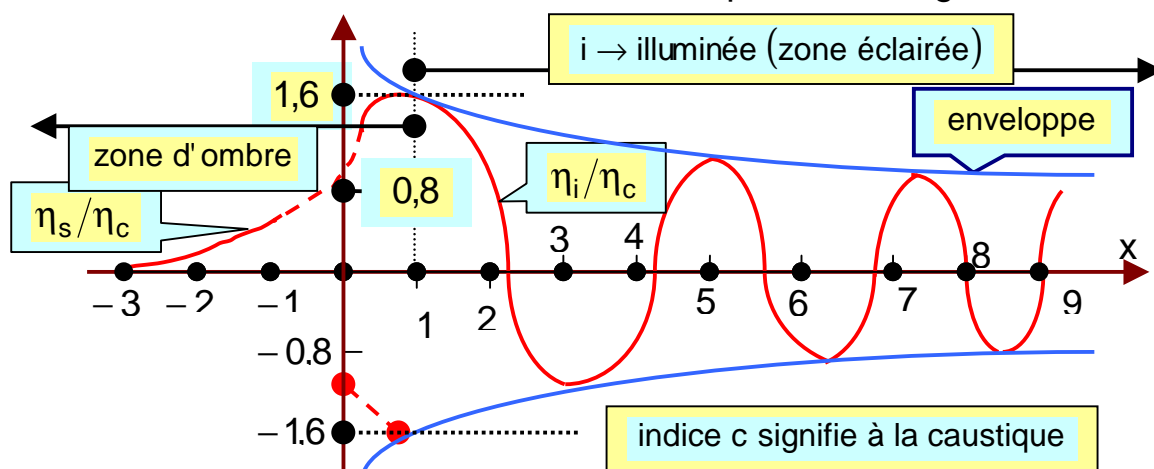
$$\eta(x, y, t) \cong a_1 \cos(\ell y + mx - \omega t) + a_1 \cos(\ell y - mx - \omega t) \quad (85)$$

ce qui est équivalent à : $\eta(x, y, t) = 2a_1 \cos mx \cos(\ell y - \omega t) \quad (86)$

L'onde entrante plus l'onde sortante produisent une série de lignes où l'amplitude est nulle parallèles à la courbe de la caustique, et une série d'oscillations qui se propagent parallèlement à la caustique.

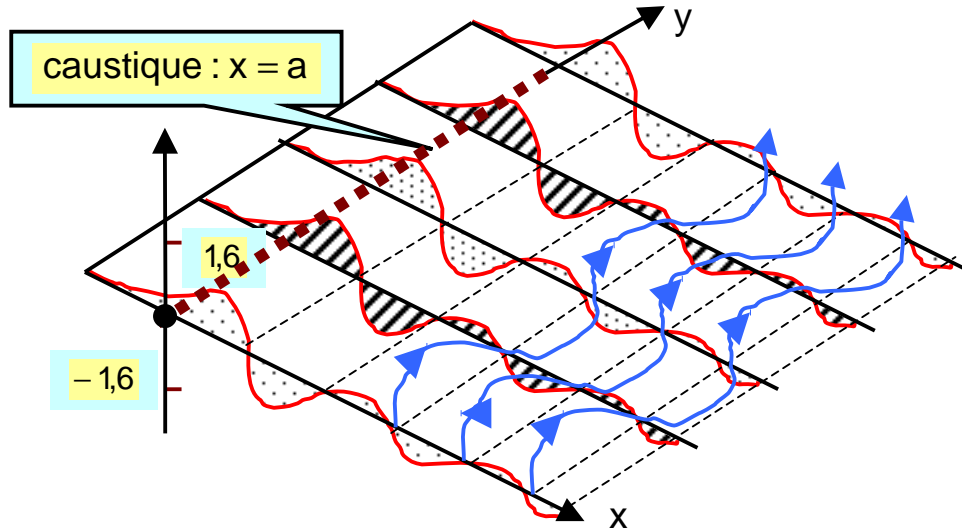
Dans les 2 équations au – dessus la caustique est une certaine ligne d'équation $x = C^{te}$. Ces 2 équations ne sont que approximatives et vérifiées pour x suffisamment loin de la caustique.

Quand la caustique est approchée da forme de l'onde résultante devient compliquée à exprimer analytiquement, mais il est prouvé que la perturbation à une amplitude finie à la caustique. **Chao** (1970) a montré que le terme $(\cos mx)$ dans l'équation (86) est remplacé par la courbe oscillatoire suivante dans le cas où la caustique est rectiligne en $x = 0$:

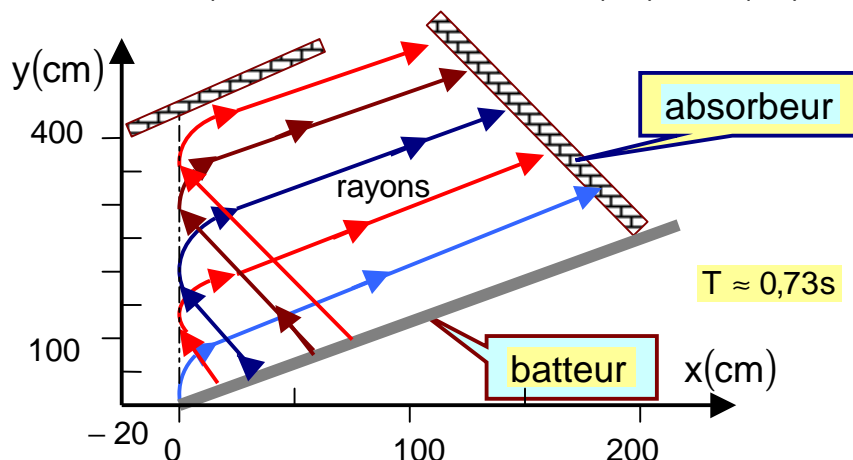


fluctuations de la surface libre à et proche d'une caustique :
 dans le cas : { d'une caustique réctiligne
 d'une bathymétrie uniforme et parallèle à la caustique

L'amplitude des ondes atteignent 1,6 fois l'amplitude à la caustique juste à la limite de la zone illuminée. Dans la zone d'ombre l'amplitude de la perturbation décroît exponentiellement. Remarquer que l'amplitude est peut être 2 fois l'amplitude des ondes à la source car elle résulte de la superposition de l'onde entrante et sortante :



L'élévation de la surface libre se propage parallèlement à la ligne de la caustique dans le sens des y positifs (oscillant entre : $\pm 1,6$). Les zéros le long de l'axe des y correspondent à $\cos mx = 0$ pour un x constant dans l'équation (86). Quand 2 caustiques se rencontrent elles peuvent former un sommet (cusp) par superposition : ce problème nécessite une étude théorique et expérimentale. Une étude expérimentale de la théorie linéaire d'une caustique rectiligne a été expérimentalement vérifiée par **Chao et Pierson** (1970) by the département of Meteorology and Oceanography, School of Engineering and Science, New York University : An experimental study of gravity wave near a straight caustic GSL report TR – 70 – 7: (aussi : J. Géo. Res. 79(30) Oct (20) 1971)



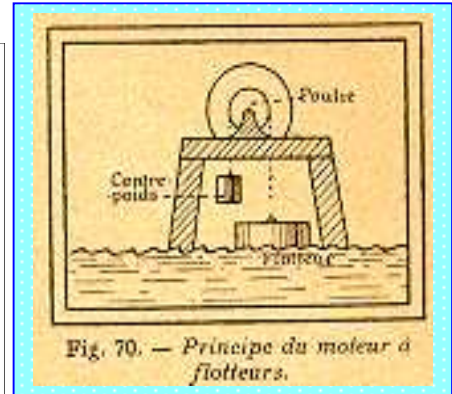
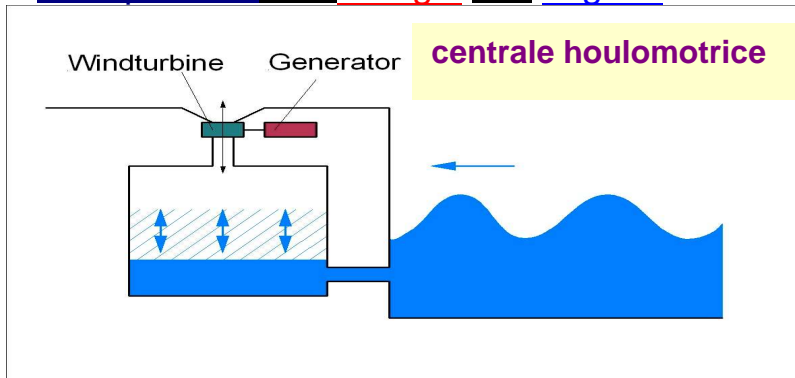
On peut tenir compte de l'effet non linéaire ($2^{\text{ième}}$ harmonique) :

$$\eta(x, y, t) = a_1 \cos(\ell y + mx - \omega t) + b_1 \cos(2(\ell y + mx - \omega t)) + a_1 \cos(\ell y - mx - \omega t) + b_1 \cos(2(\ell y - mx - \omega t)) \quad (87)$$

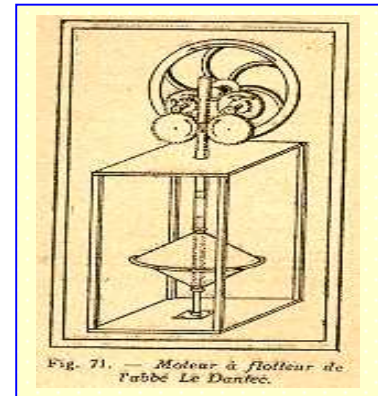
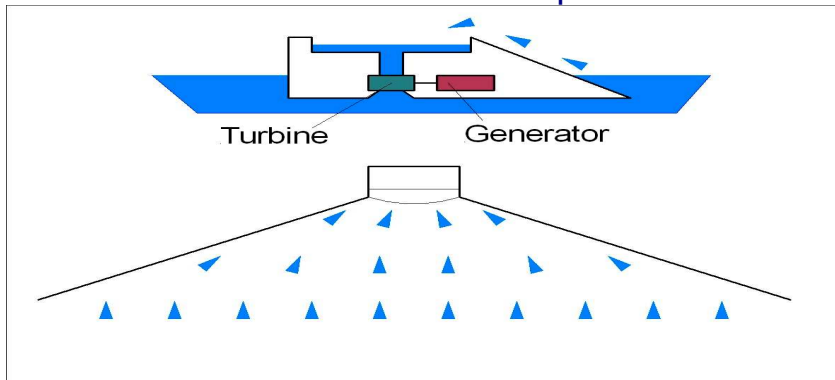
ce qui est équivalent à: $\eta(x, y, t) = +2a_1 \cos mx \cos(\ell y - \omega t) + 2b_1 \cos 2mx \cos(2(\ell y - \omega t)) \quad (88)$

la vérification de la forme de l'enveloppe proposée avant a mis en évidence que la contribution de la 2^{ème} harmonique est importante.

+ Récupération de l'énergie des vagues: Idées

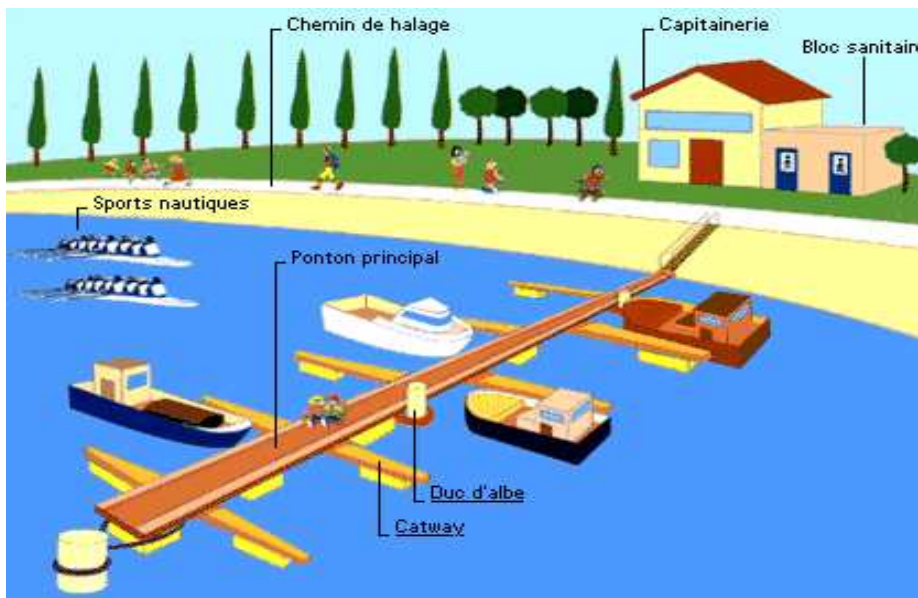


Colonne d'eau oscillante : compression d'air



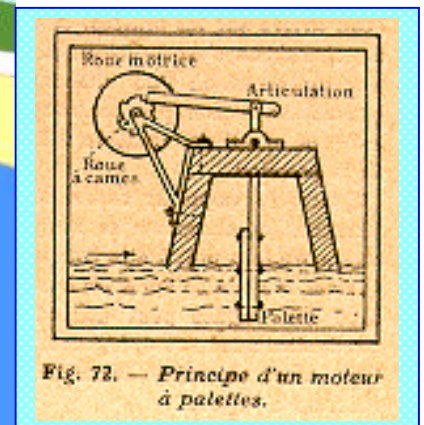
Overtopping : Réservoir d'eau (énergie potentielle)

$$\Phi(x, z, t) = \frac{gH}{2\omega} \frac{ch(k(z+d))}{ch(kd)} \sin(kx - \omega t)$$



$$F = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-d}^{\eta} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z + p \right) u_1 dz dt$$

$$F = - \frac{\rho}{T} \int_0^T \int_{-d}^0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dt dx$$



Le lecteur séduit par **wave energy technology** convecteur au cous **Machines Hydrauliques**

➤ **Proposition de centrale**

houlomotrice : c'est-à-dire générant de l'électricité par le mouvement des vagues, repose sur un assemblage flexible de 1 734 petites dalles de céramiques, épaisses de 8 cm chacune, immergé dans l'océan. Chaque dalle est reliée, par un fil, à une bouée flottant en surface et le tout est recouvert d'un **film plastique piézoélectrique**. C'est-à-dire dont la déformation génère de l'électricité (voir plus bas). Avec le va – et – vient de chaque bouée ballottée par les vagues, l'ensemble de la mosaïque se tord et se distord sans cesse. Une surface de près de 200 hectares fabriquerait avec tous ses mouvements autant d'énergie qu'une centrale nucléaire.

➤ **Le serpent de mer écossais**

Il s'appelle Pelamis. Et c'est un nouveau venu parmi les projets de centrales houlomotrices. Cette chaîne de tubes articulés rouge pétant, d'une longueur totale de 120 mètres, a enfin été testée en mars dernier au large d'Edimbourg, en Ecosse. Placé face aux vagues de la mer du Nord, Pelamis "ondule" au rythme de la houle et convertit ses mouvements en énergie. Il est désormais raccordé au réseau électrique britannique. Ses investisseurs pensent que c'est un produit leader dans l'utilisation commerciale de l'énergie des vagues qui commence.

<http://www.oceanpd.com/>

Ce projet Conçu en 2001 par Yosuke Obuchi à l'université de Princeton (Etats-Unis)

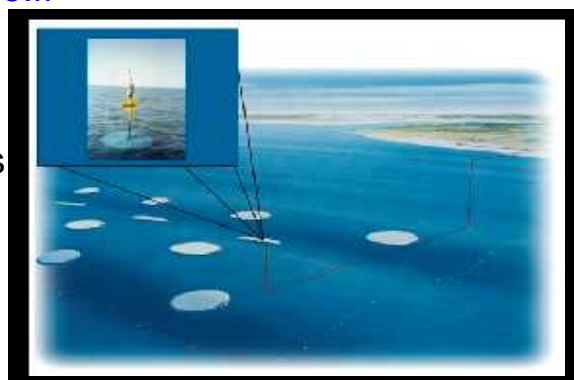


➤ **L'hydrolienne française à contre-courant**

Hydrohelix Energies a mis au point près de Quimper un système d'éoliennes sous-marines : les hydroliennes. Selon ses concepteurs, une rangée d'hydroliennes, plantées entre 20 et 40 mètres de profondeur, permet d'accéder à l'énergie des courants marins. Pour la France, le potentiel disponible serait de l'ordre 3 à 6 gigawatts, l'équivalent de trois ou quatre centrales nucléaires, de quoi assurer 5 % de la production électrique nationale. Seul hic, depuis le dépôt de brevet en 1999, personne ne semble intéressé par leur technologie. Une offre de partenariat adressée à EDF a été écartée par l'entreprise publique, alors que celle-ci est engagée dans un projet similaire en Grande-Bretagne, sous le nom de Marine Current Turbine (MCT). Ailleurs, des projets hydroliennes sont en cours en Italie, en Norvège, au Canada et aux Etats-Unis. hydrohelix-energies@wanadoo.fr



➤ **Les PowerBuoy espagnols :**
Une dizaine de mini centrales électriques - des bouées géantes - vont être déployées par Ocean Power technologies au large des côtes du Pays basque espagnol, à Biscaye. Encore expérimentales, ces PowerBuoy, immergées de quelques mètres sous la surface des flots, font monter et descendre un piston avec la houle, générant du courant électrique au rythme des vagues, soit au gré des conditions de la mer, durant 90 % du temps. Cette installation pilote, la première en Europe après celle d'Honolulu, pourra se transformer en 2006 en une véritable "centrale à vagues" de 100 mégawatts, si son efficacité se confirme d'ici là.



<http://www.oceanpowertechnologies.com>

<http://www.e-tidevannsennergi.com>

➤ **Avec vents et marées**

En janvier 2004, la Norvège a inauguré sa première centrale marémotrice, dans le détroit de Kvalsundet. Principale innovation de cette petite installation : elle est entièrement immergée. Son allure rappelle plutôt celle d'un champ d'éoliennes plantées

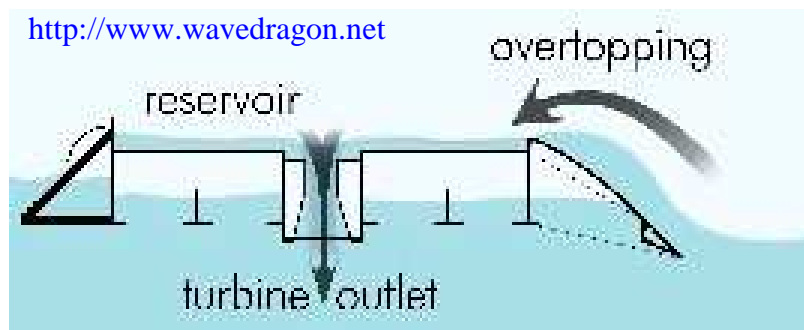
Idée: On peut utiliser des pendules → capteurs



sous l'eau, quelques 25 mètres au-dessus des fonds des fonds. Les pales du rotor, entraînées par le flux et reflux de la marée, ont la capacité de changer d'axe pour s'adapter au courant. Pour l'instant, seules deux "hydroliennes" sont en place sur la vingtaine prévues. Puissance escomptée à l'unité : 300 kilowatts, soit une centaine requise pour produire autant d'énergie que l'usine française de la Rance.

➤ **Petit dragon au pays des sirènes :**

Les **Danois** avaient déjà une sirène. Ils ont maintenant le Wave Dragon. Ce système financé conjointement par le Danemark et l'Union européenne, mis à l'eau depuis mai 2003, présente une embouchure légèrement surélevée, tournée vers le ciel mais continuellement balayée par les vagues. Le principe de cette centrale à vagues est directement tiré des retenues hydroélectriques utilisées dans les terres.



remarque :

Pour disposer d'une onde marine monochromatique on peut utiliser un filtre hydrodynamique : par exemple des résonateurs quart d'onde

Submergé par les flots, le Wave Dragon se remplit d'eau. Comme un entonnoir de plusieurs milliers de m³. La pression de cette colonne d'eau, entretenue et alimentée par les vagues qui s'y engouffrent, entraîne des turbines qui génèrent le courant. Le prototype actuel, ancré au nord du Danemark, dans des eaux modérément calmes, est cinq fois plus petit que sa version définitive, déployée pour 2006. Conçu pour la haute mer, ce modèle profitera de puissantes déferlantes, chiffrées à 36 kilowatts par mètre. Ce qui fera le Dragon à 7 mégawatts.

➤ **La baleine nippone gloutonne :**

www.jamstec.go.jp/jamstec/myt.html



Depuis 1998, on croise dans la baie de Gokasho une grosse baleine artificielle et colorée - la Mighty Whale. Ce navire de 50 mètres de long et 30 mètres de large, est entièrement nourri au rythme des vagues. Celles-ci sont avalées par l'engin flottant et contenues à l'intérieur d'une cavité surplombée de turbines. Ce n'est pas la force des vagues qui génère

l'électricité mais les pressions et appels d'air que leur agitation provoque. Depuis les premiers essais de l'agence japonaise des technologies marines, en 1978, ce système a été amélioré. Le taux de conversion de cette centrale à vagues à air comprimé est maintenant de 50 %. Autre avantage : une fois "digérées" par la Mighty Whale, les vagues s'estompent, laissant derrière elles une mer calme.

Sous le pont de San Francisco : si l'on y installait une centrale marémotrice ? Le site, l'un des plus favorables au monde, représente une vraie "mine d'or" hydroélectrique. Un filon renouvelable estimé à 2 000 mégawatts (le double des records de consommation de la cité) si l'installation courrait sous le pont, sur toute la baie. De quoi rendre la ville autonome mais aussi dégager un surplus d'électricité que l'on peut commercialiser. Seule inquiétude : l'impact d'un tel projet sur la vie sous-marine. Mais la proposition d'HydroVenturi - dont le tuyau-turbine, sans pièce mobile, génère du courant par effet Venturi - a remis l'hypothèse au goût du jour. Résultat, convaincu de la nécessité à long terme, le conseil municipal de San Francisco a débloqué à l'unanimité un budget de 2 millions de dollars pour étudier la faisabilité d'une telle centrale. Un premier projet à petite échelle (1 mégawatt) mais une volonté politique inédite au pays de l'oncle Sam. <http://www.hydroventuri.com/>

Une solution caractéristique du système d'équations de boussineq est **une onde solitaire** : (voir Ch07 pp17 pour plus de détail) :

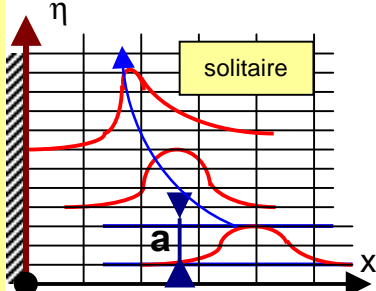
$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_t + \bar{u} \cdot \bar{u}_x + g\eta_x &= \frac{1}{3} h_0^2 \bar{u}_{xxt} \\ \eta_t + [(h_0 + \eta) \cdot \bar{u}]_x &= 0 \end{aligned} \right\} \text{III} \quad \bar{u}(x, t) = \frac{1}{h_0 + \eta} \int_{-h}^{\eta} u dz$$

où h_0 = tirant d'eau au repos et

$$c = \sqrt{g(h_0 + a)} \quad (H/h_0)_b = 0,78 \quad \text{ondes 2D avec crêtes parallèles}$$

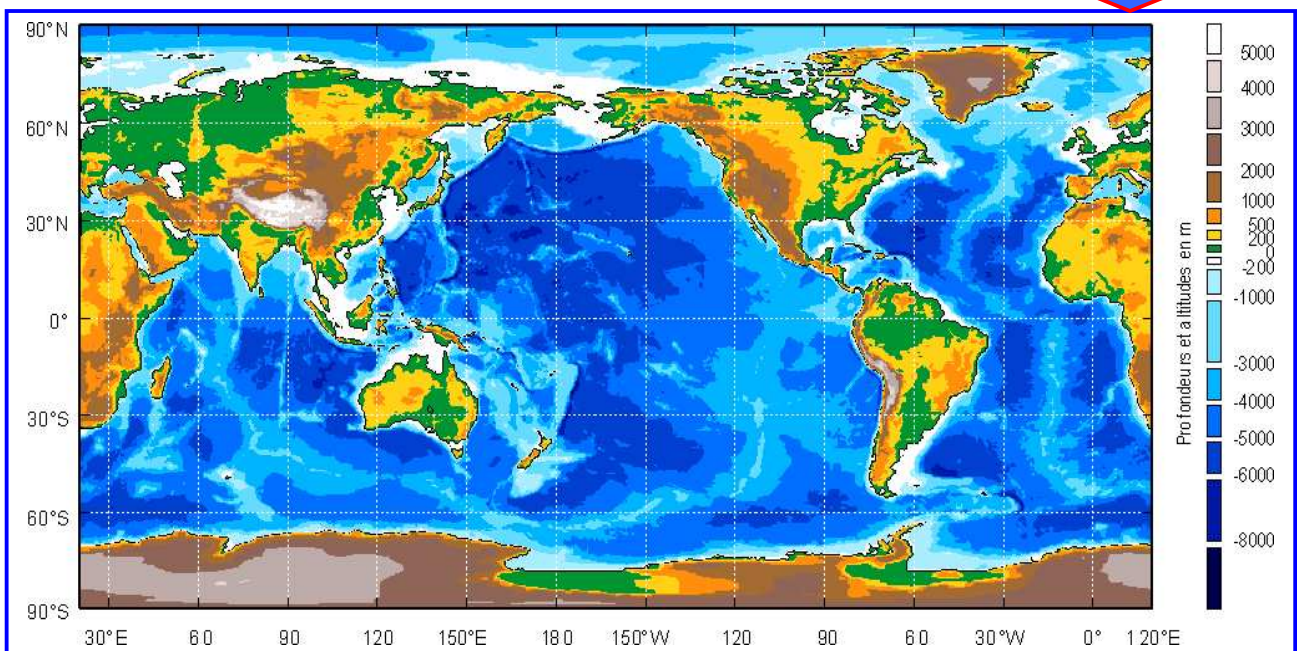
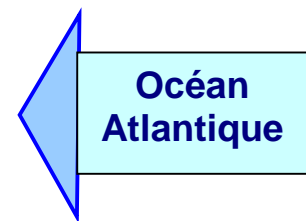
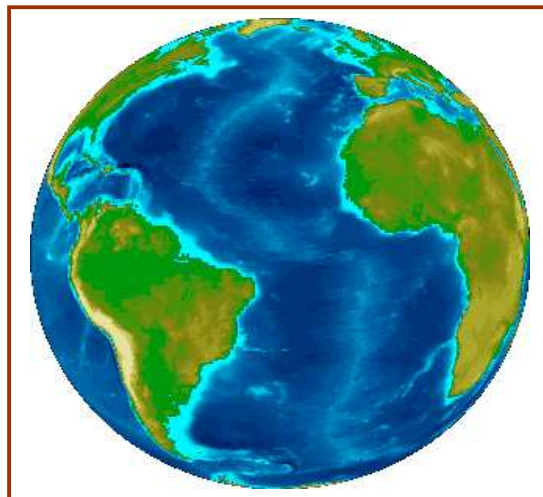
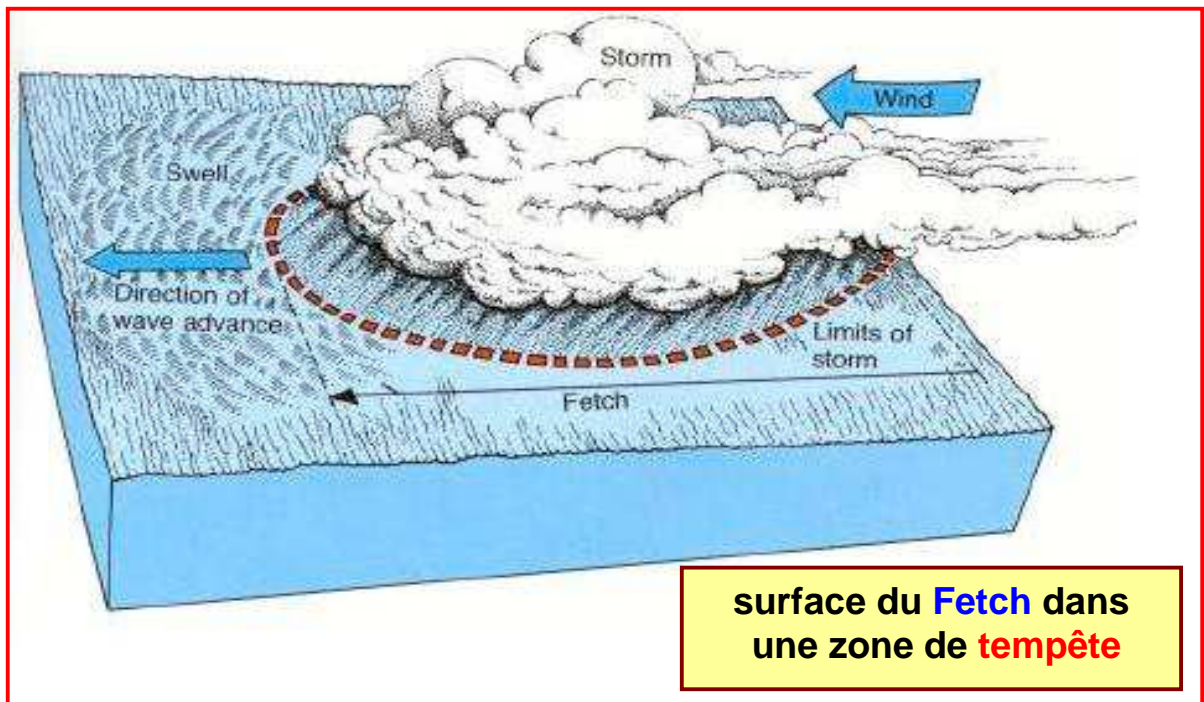
$$\eta(x, t) = 2a \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{3a}{2h_0^3} \right)^{\frac{1}{2}} (x - ct) \right] \quad \text{et} \quad \bar{u} = \left(\frac{g}{h_0} \right)^{\frac{1}{2}} \eta$$

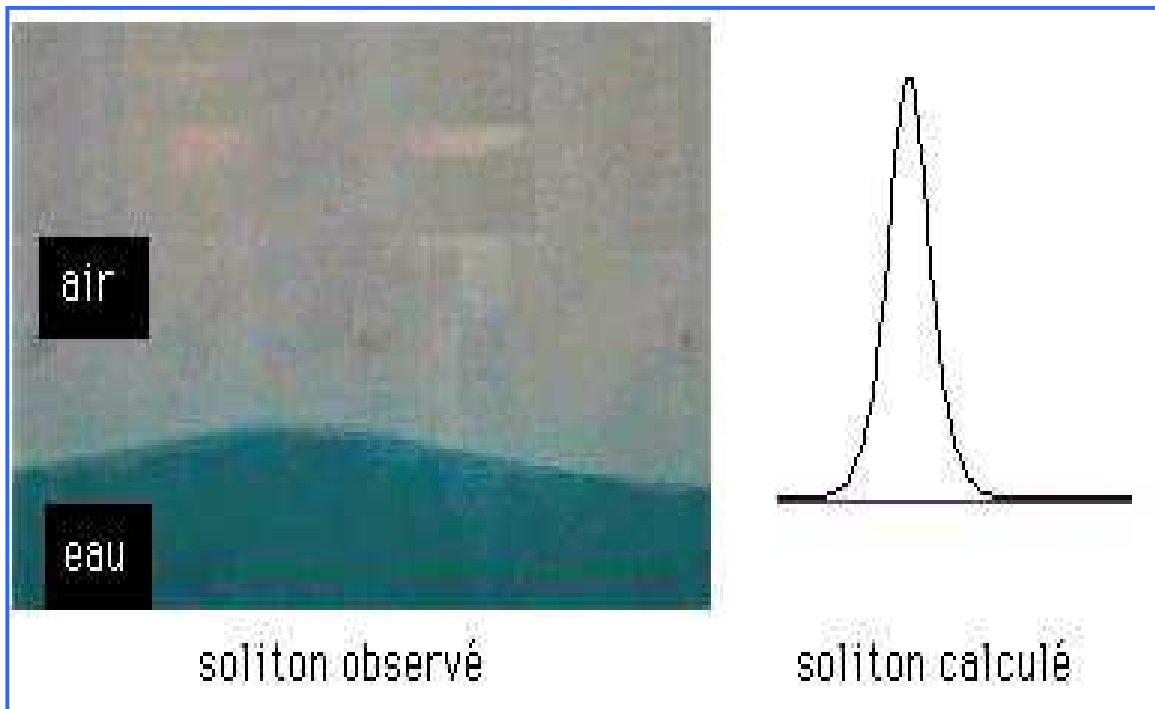
avec : $c = (gh_0)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a}{2h_0} \right)$ (4-18) ; $\operatorname{sech} Z \equiv \frac{1}{\operatorname{ch} Z}$



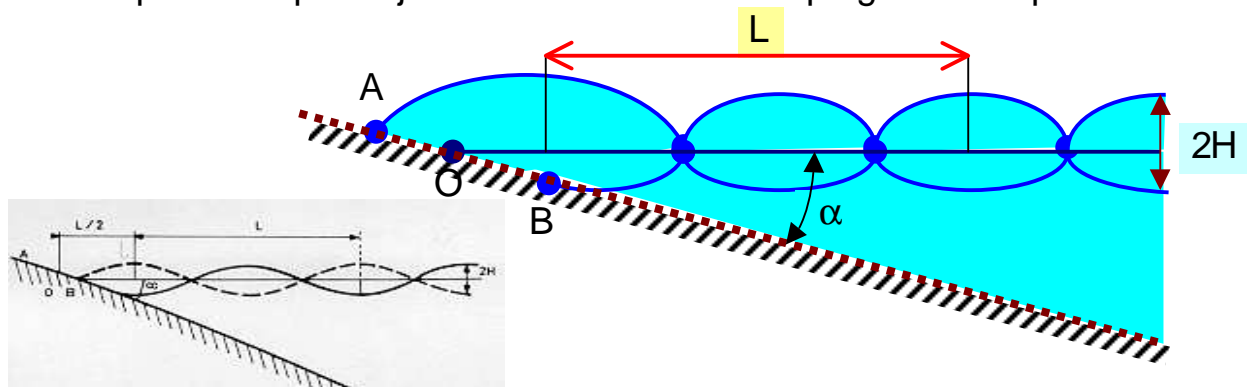
Les autres variables du champ de l'écoulement sont :

- $u = \bar{u} - \left(\frac{1}{3} h_0^2 - zh_0 + \frac{1}{2} z^2 \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$ et $w = -(h_0 + z) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$
- $p = \rho g(\eta - z) + \rho \left(zh_0 + \frac{1}{2} z^2 \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t}$





Réflexion d'onde sur une paroi inclinée : Une plage par exemple
 Quand une paroi fait un angle α avec l'horizontale selon **Miche** le chemin parcouru par le jet de rive sur le haut de plage est tel que :



La vitesse du jet de rive est maximale en O où elle vaut :

$$V_{\max} \text{ en O} = \frac{\pi \cdot H}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{g}{\alpha \cdot L}}$$

La **cambrure maximale** donnant naissance à ce clapotis est :

$$\left(\frac{H}{L}\right)_{\max} \equiv \gamma_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha}{\pi}} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\pi} \approx 0,254 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sin^2 \alpha$$

soit :

α°	45	15	5
$\gamma_{\max} \%$	1,1	0,9	0,05

donc les houles plus comblées déferlent sur le haut de plage.

Sur un talus de pente comprise entre 1/5 et 3/2, la profondeur critique de déferlement d_c est donnée par :

$$d_c = H \cdot \left(0,47 + 0,023 \cdot \frac{L}{H} \right) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

Les houles plus faibles se réfléchissent totalement ou partiellement : le rapport entre le creux de l'onde réfléchi H_R et le creux incident H_I est fonction de l'angle du talus α ; il diminue très vite avec α , il est fonction de la cambrure au large (eau profonde), il diminue quand elle augmente; enfin il dépend de la nature de la surface du talus. Ce **coefficient de réflexion** est donné par :

$$R = \frac{H_R}{H_I} = \frac{k}{\gamma_0} \cdot \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\pi} \quad \text{où} \quad \begin{cases} k = 0,9 \text{ à } 1: \text{revêtement lisse en béton} \\ k = 0,7 \text{ à } 0,8: \text{revêtement en maçonnerie} \\ k = 0,6 \text{ à } 0,7: \text{revêtement en pierre} \\ k = 0,5 : \text{massifs en blocs d'enrochement} \end{cases}$$

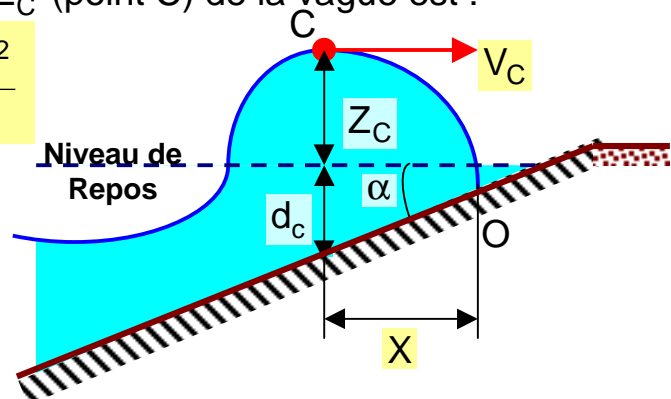
La cote de l'élévation maximale Z_C (point C) de la vague est :

$$Z_C = H - \left(0,84 \cdot \cot \alpha - \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{H^2}{L}$$

La vitesse en C est :

$$V_C = n \cdot \frac{L}{T} + \frac{g \cdot H \cdot T}{2 \cdot L} \quad \text{avec}$$

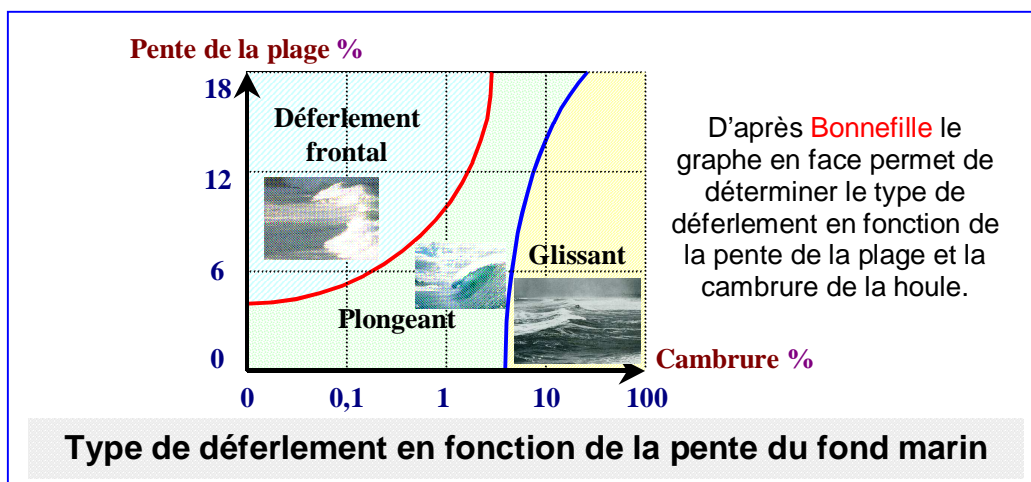
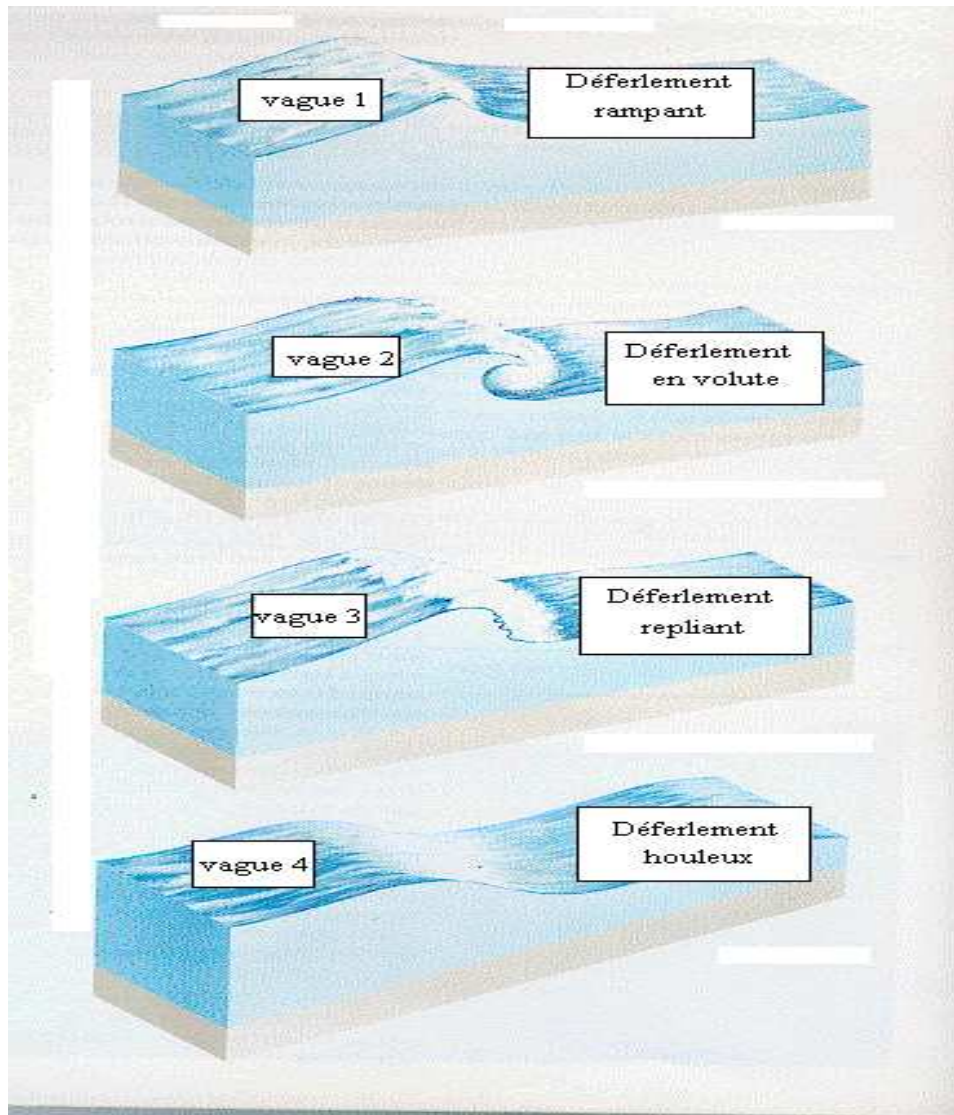
$$n = \frac{4,7}{\gamma} + 3,4 \cdot (\cos \alpha - 0,85)$$



Le point O où se produit le choc de la lame déversante est situé à une distance X de C :

$$X = \frac{V_C^2}{g} \cdot (Z_C + d_c) \cdot \frac{V_C}{g} \cdot \sqrt{V_C^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \cdot g \cdot (Z_C + d_c)}$$

A propos des **types** de **déferlement** et leur **forme** :

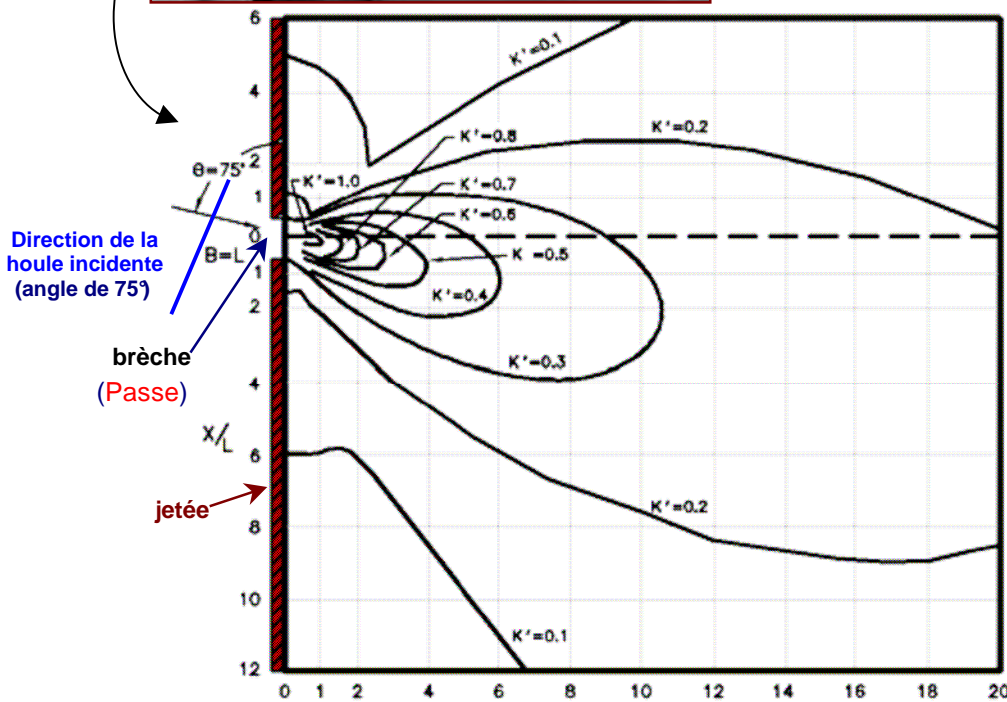
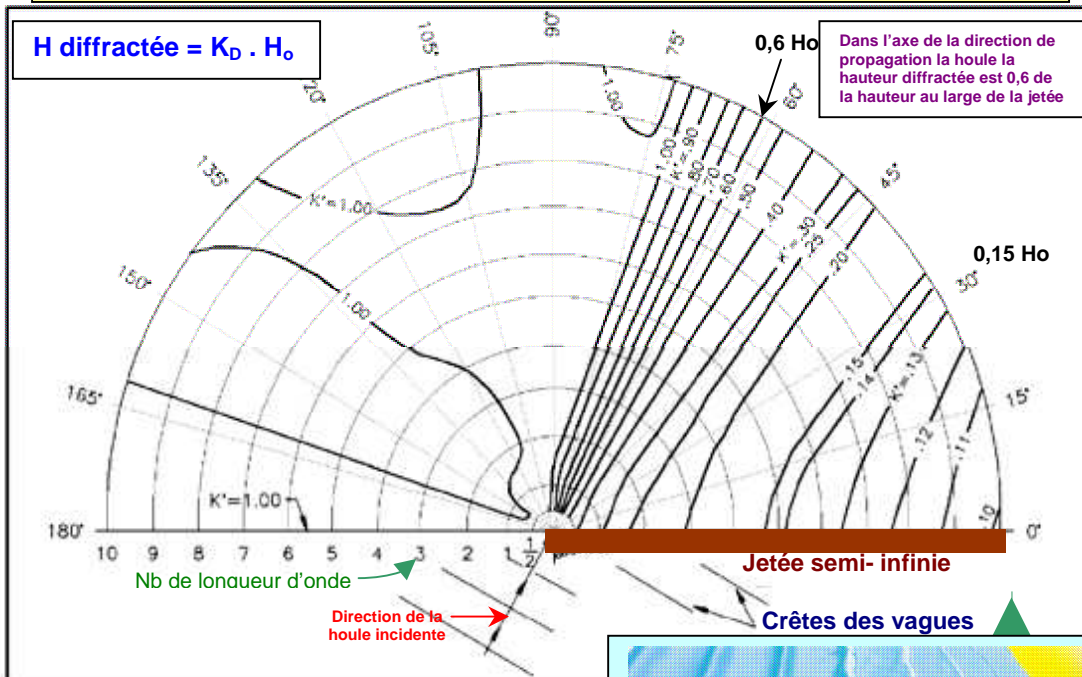


Wave diffraction diagramme - 60° wave angle

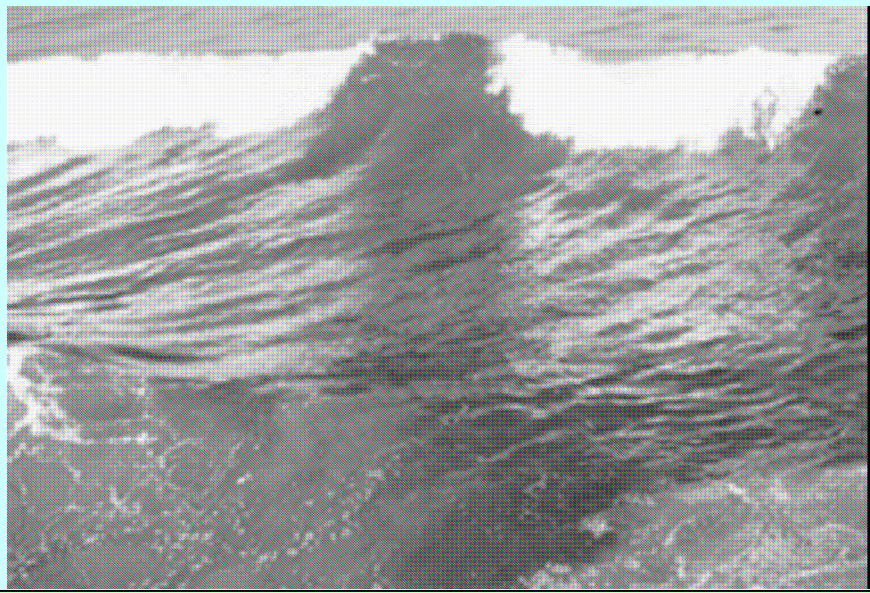


Même dans le cas le plus simple le calcul de la diffraction est très complexe. Dans des cas simples et en faisant l'hypothèse de fonds plats on peut utiliser des abaques comme celle présentée ci-dessous. Sinon il faut faire appel à des modèles numériques.

H diffractée = $K_D \cdot H_o$

Dans l'axe de la direction de propagation la houle la hauteur diffractée est 0,6 de la hauteur au large de la jetée



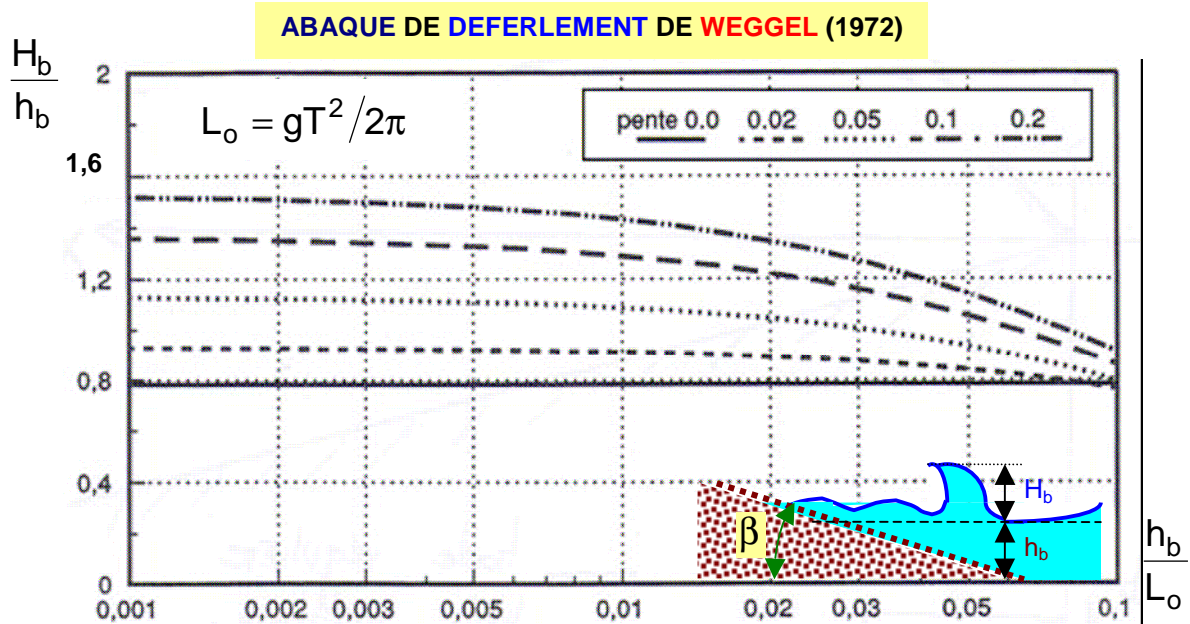
Les différents types de déferlement : voir Ch01 de HM page 29

	<p>Déferlement Gonflant (pentes faibles) (surging)</p>
	<p>$\xi_o > 3.3$</p>
	$\xi_o \equiv \text{tg}\beta \cdot \left(\frac{H_o}{L_o} \right)^{\frac{1}{2}}$
	<p>Déferlement plongeant (plunging)</p>
	<p>$0.5 < \xi_o < 3.3$</p>
	<p>H_o amplitude de la houle crête – creux en eau profonde</p>
	<p>$L_o = gT^2/2\pi$</p>
	<p>Déferlement Glissant (ou déversant) (pentes fortes) (Spilling)</p>
	<p>$\xi_o < 0.5$</p>

➔ ➔ **FORMULE** de **DEFERLEMENT** de **WEGGEL** (1972) :

$$\frac{H_b}{h_b} = \frac{b}{1 + a \cdot \frac{h_b}{L_o}} \quad \text{avec} \quad L_o \approx 1,56 \cdot T^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} a = 6,963 \cdot [1 - \exp(-19 \cdot m)] \\ b = \frac{1,56}{1 + \exp(-19,5 \cdot m)} \end{cases}$$

$m = \tan \beta = \text{pente de la plage}$, $h_b = d_b = \text{profondeur au déferlement}$



Efforts hydrodynamiques

Ces efforts sont dus soit aux courants généraux, soit aux courants de houle, soit au déferlement des vagues. Les deux premiers cas la littérature est riche à leur sujet, on dispose de la **formule** de **Morison** pour les calculer. Mais il n'existe pas une formule pour le déferlement, dans ce cas on recourt à l'expérience.

- **Forces** dues à un **courant permanent** :

Un courant permanent induit, sur un cylindre horizontal immergé, une traînée horizontale et une portance verticale :

$$F_H = \frac{1}{2} C_H \rho D V^2 = \text{traînée/m. longueur du cylindre}$$

$$F_V = \frac{1}{2} C_V \rho D V^2 = \text{portance/m. longueur du cylindre}$$

où D = diamètre de la conduite cylindrique, ρ = masse volumique de l'eau de mer et V = vitesse de l'écoulement permanent non perturbée par la présence du cylindre. $C_H = 1$ et $C_V = f(d/D)$ où d/D = est l'excentricité.

- **Forces** dues à la **houle** :

Les formules de **Morisson** permettent de calculer ces efforts :

$$F_H = \frac{1}{2} C_D \rho D V |V| + C_H \rho W \frac{dV}{dt}$$

$$F_V = \frac{1}{2} C_p \rho D f(V^2) + C_z \rho W \frac{dV}{dt}$$

F_H est la force horizontale par mètre de longueur du cylindre, F_V est la portance, D diamètre de la conduite (maître couple), V est la vitesse engendrée par la houle, $W = \pi D^2/4$ (volume d'un élément de conduite), $f(V^2)$ fonction expérimentale de la vitesse. C_D , C_H , C_p et C_z sont des coefficients qui dépendent du nombre de Reynolds (caractérisant le régime d'écoulement), de la distance de la conduite du fond, de la profondeur d'immersion et de l'amplitude de la houle (on peut trouver dans la littérature des abaques à ce sujet).

Cas d'un cylindre (pieux) vertical isolé

Autour du cylindre la houle sera diffractée \pm selon dimension du cylindre par rapport à longueur d'onde. Il en résulte d'une part une différence de niveau d'eau de part et d'autre du cylindre et d'autre part un frottement dû à la vitesse de l'eau au contact du cylindre. Pour une houle non déferlante sur le pieux s'exerce une force qui à deux composantes :

$$F_D = \text{Force dynamique de traînée (Drag)} = \frac{1}{2} \rho C_D S u^2$$

$$F_i = \text{Force d'inertie virtuelle} = C_M \rho W \frac{du}{dt} \quad (C_M = \text{coefficient de masse})$$

où

(S = le maître couple total) & (W = le volume total du pieux)

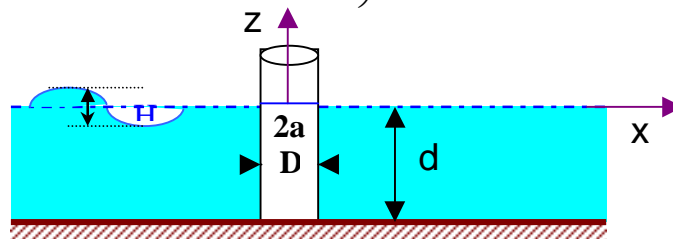
Remarque :

Si la houle déferle sur le pieux il apparaît une force d'impulsion (gifle) bien supérieure aux précédentes due à l'accélération horizontale.

La théorie simplifiée (**J.R. Morison & M.P. O'Brien : the force exerted by surface waves on pile Petroleum**, Transaction, AIME Vol 189 1950)

Suppose que le pieux de diamètre D ne perturbe pas la houle. Pour une tranche (dz) à la cote (z) au – dessous du MWL :

$$dF = \left(\rho C_M \frac{\pi D^2}{4} \frac{du}{dt} \pm \frac{1}{2} \rho C_D D u^2 \right) dz \quad \text{le (+) pour } (-1/4 < t/T < 1/4)$$



avec

$$u = \frac{\pi H}{T} \frac{\operatorname{ch} 2\pi \frac{d+z}{L}}{\operatorname{sh} 2\pi \frac{d+z}{L}} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\rho \pi^2 D H^2}{2T^2} \left[-C_M \pi Z(z) \frac{D}{H} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \pm C_D Z^2(z) \cos^2\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \right] \text{ où}$$

$$Z(z) = \frac{\operatorname{ch} 2\pi \frac{d+z}{L}}{\operatorname{sh} 2\pi \frac{d+z}{L}}$$

N.B. : valeurs caractéristiques : $(0,5 \leq C_D \leq 1,4)$ & $(1,5 \leq C_M \leq 2)$
 et signe plus (+) pour $(-\pi/2 < 2\pi t/T < \pi/2)$ c'est - à - dire $(-1/4 < t/T < 1/4)$.
 Le moment de renversement dû à la houle correspond aux moments de ces forces élémentaires par rapport au bas du pieux.

Conditions aux limites :

- ◆ A la surface libre la pression est nulle :
 en $(z = 0)$ on a $(p = 0)$
- ◆ Le fond est imperméable :
 en $(z = -d)$ on a $(w = 0)$
- ◆ Sur le pieux la composante normale de vitesse est nulle :
 en $(r = a = \text{rayon du cylindre})$ on a $(v_r = 0)$

On cherchera une solution de la forme :

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \sum_m R_m(r) H_m(\theta) Z_m(z) \exp\left(2i\pi \frac{t}{T}\right)$$

On est conduit par les conditions limites à :

$$\Phi = -\frac{igHT}{4\pi} Z(z) \exp\left(2i\pi \frac{t}{T}\right) \left\{ \exp(ikr \cos \theta) + \sum_m \gamma_m H_m^{(2)}(kr) \cos(m\theta) \right\} \text{ où}$$

$H_m^{(2)}(kr)$ = fonction de **Hankel** de 2^{ième} espèce (se comporte en une onde qui se propage à partir du cylindre radialement et qui s'annule à l'infini).

Les constantes (γ_m) sont déterminées par :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \text{ en } (r = a)$$

ce qui donne :

$$\Phi = -\frac{igHT}{4\pi} \frac{\operatorname{ch} k(d+z)}{\operatorname{ch} kd} e^{2i\pi \frac{t}{T}} \sum_{m=0}^{\infty} (i)^m \delta_m \left[J_m(kr) - \frac{J'_m(kr)}{H_m^{(2)'}(ka)} H_m^{(2)}(kr) \right] \cos(m\theta)$$

avec $\delta_0 = 1$ & $\delta_{m \neq 0} = 2$.

Il est possible de calculer l'élévation de la surface libre :

$$\eta(x, y, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0}$$

et la pression en chaque point, en appliquant théorème de **Lagrange** :

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho g z - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \rightarrow p \approx -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{r=a}$$

d'où l'expression de la résultante des pressions sur le cylindre :

$$F = 2a \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta \int_{-d}^{\eta(\theta)} p dz \rightarrow F \approx 2a \int_0^{\pi} p \cos \theta d\theta$$

et du moment par rapport au fond :

$$M = 2a \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta \int_{-d}^{\eta(\theta)} p (z + d) dz$$

Le calcul devient simple si on suppose que (kH) , c'est – à – dire (H/L) , est petit (cambrure faible) alors :

$$F = \frac{2\rho g H \operatorname{th}(kd)}{k^2 H_1^{(2)}(ka)} \exp\left(2i\pi \frac{t}{T}\right)$$

dont le module est :

$$|F| = \frac{1}{2} \rho g H D^2 \operatorname{th}(kd) \frac{1}{(ka)^2 \sqrt{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)}}$$

La pression moyenne sur le maître – couple (dD) est :

$$P_m = \frac{|F|}{d \times D} \text{ n'est fonction que de } (kd) \text{ \& de } (ka)$$

De même si (kH) est petit vis – à – vis de l'unité, on a :

$$M = \frac{F}{k \operatorname{th}(kd)} \left\{ kd \operatorname{th}(kd) + \frac{1}{\operatorname{ch}(kd)} - 1 \right\}$$

La longueur du bras de levier (ℓ) , c'est – à – dire la cote au – dessus du fond où est appliquée la force est :

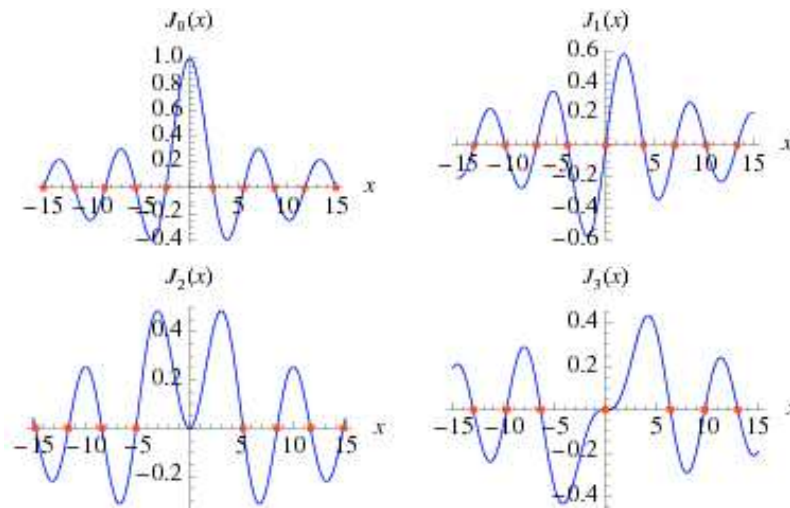
$$\ell = d \left\{ 1 + \frac{1}{kd \operatorname{sh}(kd)} - \frac{1}{kd \operatorname{th}(kd)} \right\}$$

Hajima ISHIDA & Kerichi TAMURA (1988) ont monté que :

$$C_D = \frac{4\omega}{k^2 a |u|} \frac{J_1'(ka)}{\{J_1'(ka)^2 + Y_1'(ka)^2\}} \quad \text{où } u = \frac{\pi H}{T} \frac{\operatorname{ch} 2\pi \frac{d+z}{L}}{\operatorname{sh} 2\pi \frac{d+z}{L}} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

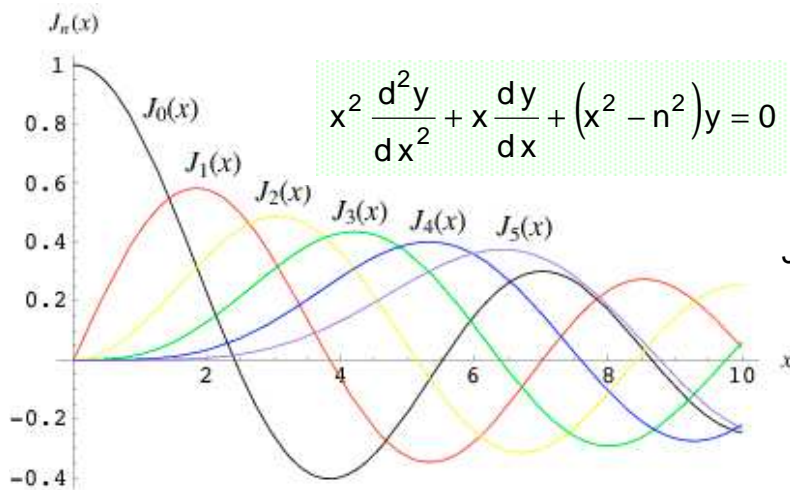
$$C_M = \frac{4\omega}{\pi k^2 a^2} \frac{Y_1'(ka)}{\{J_1'(ka)^2 + Y_1'(ka)^2\}}$$

The determination of drag coefficient for a circular cylinder placed vertically in wave field under the conditions of non-reparation flow and symmetric vortices.



Revoir à ce propos page 52 de ce même chapitre.

$k^{ième}$ Racine	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1 ^{ière}	2,4048	3,8317	5,1356	6,3802	7,5883	8,7715
2 ^{ième}	5,5201	7,0156	8,4172	9,7610	11,0647	12,3386
3 ^{ième}	8,6537	10,1735	11,6198	13,0152	14,3725	15,7002
4 ^{ième}	11,7915	13,3237	14,7960	16,2235	17,6160	18,9801
5 ^{ième}	14,9309	16,4706	17,9598	19,4094	20,8269	22,2178



$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

$$J_n(x) = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell+|n|} \ell! (|n| + \ell)!} x^{2\ell+|n|} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \text{ pour } n = -\frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \text{ pour } n = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ordre	Indice de modulation m													
	0,2	0,5	1	1,5	2	2,4	3	3,83	4	5	5,14	6	8	10
0	0,99	0,938	0,765	0,512	0,224	0	-0,26	-0,403	-0,397	-0,178	-0,131	0,15	0,172	-0,246
1	0,1	0,242	0,44	0,558	0,577	0,52	0,339	0	-0,066	-0,328	-0,34	-0,277	0,235	0,044
2	≈0	0,03	0,115	0,232	0,353	0,431	0,486	0,403	0,364	0,047	0	-0,243	-0,113	0,255
3	≈0	≈0	0,02	0,061	0,129	0,198	0,309	0,420	0,43	0,365	0,339	0,115	-0,291	0,058
4	≈0	≈0	≈0	0,012	0,034	0,064	0,132	0,255	0,281	0,391	0,397	0,358	-0,105	-0,22
5	≈0	≈0	≈0	≈0	0,007	0,016	0,043	0,113	0,132	0,261	0,279	0,362	0,186	-0,234
6	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,011	0,04	0,049	0,131	0,146	0,246	0,338	-0,015
7	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,012	0,015	0,053	0,062	0,13	0,32	0,217
8	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,018	0,022	0,057	0,223	0,318
9	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,007	0,021	0,127	0,292
10	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,007	0,06	0,208
11	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,026	0,123
12	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	≈0	0,009	0,063

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \Rightarrow J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \left(\frac{n}{x}\right) J_n(x)$$

☞ Influence de la réfraction par un courant :

Dans les eaux peu profondes proche de l'embouchure d'un fleuve les courants peuvent être importants et la réfraction par ces courants n'est pas forcément négligeable. En supposant un courant uniforme (U, V) sur le tirant d'eau l'équation de **Berkhoff** (the mild – slop équation) tenant compte de la réfraction par le courant selon **Dingemans** (1985) est :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c c_g \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c c_g \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + 2i\omega \left(U \frac{\partial \psi}{\partial x} + V \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \left(\omega_R^2 - \omega^2 - \omega^2 n - \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) \psi = 0 \quad \text{où}$$

$$\phi(x, y, t) = \text{Re} \left[\psi(x, y) \cdot e^{-i\omega t} \right] \quad \text{avec}$$

U, V : les composantes du courant

$\omega = [gkthkh]^{0,5}$ = fréquence absolue

$\omega_R = \omega - (k_x U + k_y V) = \omega - |\vec{k}| \cdot |\vec{V}| \cdot \cos \gamma$

γ = angle entre l'onde et le courant

i = nombre imaginaire ($i^2 = -1$)

☞ Résolution numérique pour déterminer les modes propres d'un port :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{gh} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad \text{pour faible pente du fond}$$

On peut résoudre ce problème aux valeurs propres par une méthode aux différences finies en approximant les dérivées par:

Si on pose $\Delta x = \Delta y = \delta$ & $\Delta t = \Delta$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \approx \frac{\Phi_{i+1,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n}{2\delta} \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \approx \frac{\Phi_{i,j+1}^n - \Phi_{i,j-1}^n}{2\delta}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \approx \frac{\Phi_{i+1,j}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n}{\delta^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \approx \frac{\Phi_{i,j+1}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j-1}^n}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \approx \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j}^{n-1}}{\Delta^2}$$

On obtient alors par report dans l'équation d'onde :

$$\frac{\Phi_{i+1,j}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n}{\delta^2} + \frac{\Phi_{i,j+1}^n - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j-1}^n}{\delta^2} = \frac{1}{gh_{i,j}} \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j}^{n-1}}{\Delta^2}$$

soit

$$\Phi_{i,j}^{n+1} - 2\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i,j}^{n-1} = gh_{i,j} \frac{\Delta^2}{\delta^2} (\Phi_{i+1,j}^n - 4\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n + \Phi_{i,j+1}^n + \Phi_{i,j-1}^n) \Rightarrow$$

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = 2\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i,j}^{n-1} + gh_{i,j} \frac{\Delta^2}{\delta^2} (\Phi_{i+1,j}^n - 4\Phi_{i,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n + \Phi_{i,j+1}^n + \Phi_{i,j-1}^n) \Rightarrow$$

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = 2 \left(1 - 2gh_{i,j} \frac{\Delta^2}{\delta^2} \right) \Phi_{i,j}^n - \Phi_{i,j}^{n-1} + gh_{i,j} \frac{\Delta^2}{\delta^2} (\Phi_{i+1,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n + \Phi_{i,j+1}^n + \Phi_{i,j-1}^n)$$

si la profondeur d'eau h est sensiblement constante alors $h_{i,j} = h$ d'où

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = 2 \left(1 - 2gh \frac{\Delta^2}{\delta^2} \right) \Phi_{i,j}^n - \Phi_{i,j}^{n-1} + gh \frac{\Delta^2}{\delta^2} (\Phi_{i+1,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n + \Phi_{i,j+1}^n + \Phi_{i,j-1}^n)$$

et en posant $gh \frac{\Delta^2}{\delta^2} = 1$ alors: **Définition :** Le **facteur d'amplification** en un point M à l'intérieur du port est le rapport de l'amplitude de la houle en ce point à la somme des amplitudes incidente et réfléchie à l'entrée du port.

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = \Phi_{i+1,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n + \Phi_{i,j+1}^n + \Phi_{i,j-1}^n - 2\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i,j}^{n-1} \quad (\mu)$$

N.B. : à propos des conditions : \Rightarrow initiales & \Rightarrow aux limites

L'équation d'onde $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$ nécessite :

- **deux conditions initiales** : Φ et $\partial \Phi / \partial t$ données en tout point (x, y) à l'instant initial ($t = t_0 = n \cdot \Delta = 0 \rightarrow n = 0$).
- **une condition aux limites** : Φ (la fonction) **ou bien** $\partial \Phi / \partial x$ (le gradient normal de la fonction) \rightarrow donnée à tout instant sur chaque limite.

Vue que $\Phi_{i,j}^{n+1}$ est fonction de $\Phi_{i,j}^n \dots$ et $\Phi_{i,j}^{n-1}$ un problème se pose pour démarrer la méthode : on connaît $\Phi_{i,j}^0 \dots$ à l'instant $t = 0$ par la condition initiale, mais on a besoin de $\Phi_{i,j}^{-1}$. Pour remédier à cette situation problématique \rightarrow on utilise la 2^{ème} condition initiale $\partial \Phi / \partial t$ donnée :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,y,0) = g(x,y) \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{n=0} \approx \left. \frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta} \right|_{n=0} = \frac{\Phi_{i,j}^1 - \Phi_{i,j}^{-1}}{2\Delta} = g_{i,j} \Rightarrow$$

$$\Phi_{i,j}^{-1} = \Phi_{i,j}^1 - 2 \cdot g_{i,j} \cdot \Delta$$

ce qui ferme le problème en reportant cette expression dans (μ), soit :

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j}^{n+1} &= \Phi_{i+1,j}^n + \Phi_{i-1,j}^n + \Phi_{i,j+1}^n + \Phi_{i,j-1}^n - 2\Phi_{i,j}^n - \Phi_{i,j}^{n-1} \Big|_{n=0} \Rightarrow \\ \Phi_{i,j}^1 &= \Phi_{i+1,j}^0 + \Phi_{i-1,j}^0 + \Phi_{i,j+1}^0 + \Phi_{i,j-1}^0 - 2\Phi_{i,j}^0 - \Phi_{i,j}^{-1} \\ &= \Phi_{i+1,j}^0 + \Phi_{i-1,j}^0 + \Phi_{i,j+1}^0 + \Phi_{i,j-1}^0 - 2\Phi_{i,j}^0 - \Phi_{i,j}^1 + 2 \cdot g_{i,j} \cdot \Delta \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Phi_{i,j}^1 = \frac{1}{2} (\Phi_{i+1,j}^0 + \Phi_{i-1,j}^0 + \Phi_{i,j+1}^0 + \Phi_{i,j-1}^0 - 2\Phi_{i,j}^0 + 2 \cdot g_{i,j} \cdot \Delta)$$

Pour assurer la stabilité d'un schéma numérique explicite il faut vérifier le critère de **Courant – Friedrichs – Levy CFL** : $\delta/\Delta =$ la vitesse numérique ne doit pas dépasser la célérité des caractéristiques $x_t = \pm c$ (voir à ce sujet non cours sur la modélisation de la circulation routière).

N.B. :

Cette distinction entre condition initiale et condition limite n'est pas d'origine mathématique mais d'origine physique du fait que le temps est de nature causal.

SCIENTISTS REVEAL FIRST PHOTOGRAPHIC EVIDENCE OF THE CAUSE OF THE TSUNAMI

The results are starting to come in concerning the cruise to the site of the Sumatra earthquake that was coled by Prof. Kate Moran of URI. Here is some information from the May 31, 2005 press release by the organizers of the expedition:

PHUCKET, THAILAND— 26 May 2005 — An international team of the world's leading scientists has just returned from the first ever scientific expedition to dive an amazing 4500 metres deep into ocean water to explore the seabed site of the 2004 Asian Tsunami. They have revealed dramatic photographic evidence of seafloor ruptures that contributed to the deadly December 26 tsunami wave.

Since May 10, scientists have spent 17 days at sea exploring the seafloor off the coast of Sumatra in order to gain a better understanding of the forces that led to the devastating tsunami. Their results will help them to piece together the dramatic sequence of events of how the giant earthquake caused the tsunami. Using geophysical survey tools, operated by the Geological Survey of Canada, and a unique deep-water remotely-operated vehicle, operated by Oceaneering International Inc., the Sumatra Earthquake and Tsunami Offshore Survey (SEATOS) team's mission is the first time that marine scientists have been able to find and film such critical ruptures at such an incredible depth deep in the Indian ocean.

The project is being filmed exclusively for a BBC, Discovery and ProSieben documentary, by award-winning UK production company Darlow Smithson Productions, for broadcast later this year.

The mosaic of photographs the team has released today show a **3 metre high x 8 metre wide section of compacted sediment**, only a small part of a huge cliff that was faulted and upthrust during the enormous earthquake and undoubtedly contributed to the creation of the **tsunami wave**.

Dr Don Fisher from Pennsylvania State University said: “The faults are absolutely fresh and it’s mind-blowing that we were fortunate enough to find these faults nearly 3 miles down.”

The faults, which were found on the outer edge of the continental shelf, provide important evidence for reconstructing the events of December 26. The observed seafloor fault surface is referred to by geologists as striated because it is smoothed by rocks moving against each other as the seafloor is ripped open. Leading the Census of Marine Life biologists, **Professor Paul Tyler** of the National Oceanography Centre, UK, was, “surprised to find absolutely no evidence of deep-sea animals at the site during a 14h dive with the ROV submersible. This is unprecedented in 25 years of sampling the deep sea.”

“This discovery is a critical piece of the puzzle for reconstructing the December 26 tsunami wave,” said **Dave Tappin**, Co-chief Scientist of the expedition from the British Geological Survey. Seafloor models that re-create the motions from the measured earthquake energy are crude in terms of their ability to pinpoint exact locations of fault movements at the seabed. The SEATOS expedition is specifically designed to explore the seafloor in search of direct evidence for the critical locations where the seabed moved and generated the giant wave.

The SEATOS team, comprises a group of 22-strong scientists from six countries, combining a variety of scientific disciplines, including tsunami wave model experts, geophysicists, biologists, seismologists, engineers, geologists, and visualization experts. This unique range of experts enabled a fully integrated approach to the expedition. **Dr Kate Moran**, Co-chief Scientist from the University of Rhode Island, explained that “we’ve gathered an experienced and diverse team of specialists for SEATOS because its one of the essential ingredients for this challenging goal to find evidence of the sources that created this most devastating of tsunamis.”

The data from the expedition will take months to analyse, and the full implications of the results will also take some time to gauge, but the scientific team are all delighted with the mission’s success and are confident that their findings will enable them a far greater and detailed understanding of the forces that led to the tsunami. The team will reconvene later this year to draw their conclusions after initial analysis has taken place.

David L Mearns, Director of Blue Water Recoveries Ltd UK, who conceived the expedition and is acting as Marine Coordinator says: “Everyone involved in the project is thrilled that we have made such a

significant scientific discovery in the relatively short period of time we have been at sea. We had a good scientific plan and our share of good fortune but we owe a great deal to the UK Hydrographic Ship **HMS Scott**, which surveyed the area earlier this year and provided a roadmap of seabed features that allowed us to zero-in with our high-resolution cameras on the most likely fault areas.”

The expedition is being filmed on location for – *Journey To The Heart Of The Tsunami* – by Darlow Smithson Productions. Directed by Ed Wardle with Julian Ware as the executive producer, it will be broadcast later this year on BBC ONE, Discovery US, ProSieben in Germany and Discovery International. Also supporting the expedition is the National Science Foundation’s ARMADA Project (<http://www.armadaproject.org/>), the Alfred P. Sloan Foundation for the Census of Marine Life Program (<http://www.coml.org/>), Oceaneering Inc, BP Marine Limited and Science Application International Corporation (SAIC)... Press contact: Lucy Puddefoot / Ashley Jones, Franklin Rae Communications 020 7317 5400 lucy@franklinrae.com / ashley@franklinrae.com

Marie Curie : née à Sklodowska : physicienne française d'origine Polonaise (Varsovie 1867, Sancellemo 1934).

Elle vient à Paris en 1892 pour poursuivre ses études à la Sorbonne. Elle épouse Pierre Curie & elle a reçu le prix Nobel de physique en 1903

Piézoélectricité :

La **piézoélectricité** (1881, Pierre et Jacques Curie) est la propriété que possèdent certains corps de se polariser électriquement sous l'action d'une **force** mécanique (effet direct) et, réciproquement, de se déformer lorsqu'on leur applique un **champ électrique** (effet inverse). Le découvreur de cette propriété est **Pierre Curie** bien qu'il semble que le premier à avoir observé ce phénomène soit l'abbé **René Just Haüy** (1743-1822). Bien que faiblement piézoélectrique, le **quartz** possède de bonnes caractéristiques mécaniques qui en font un matériau utilisé dans les **capteurs** ainsi qu'en horlogerie :

Quartz : Wikipédia

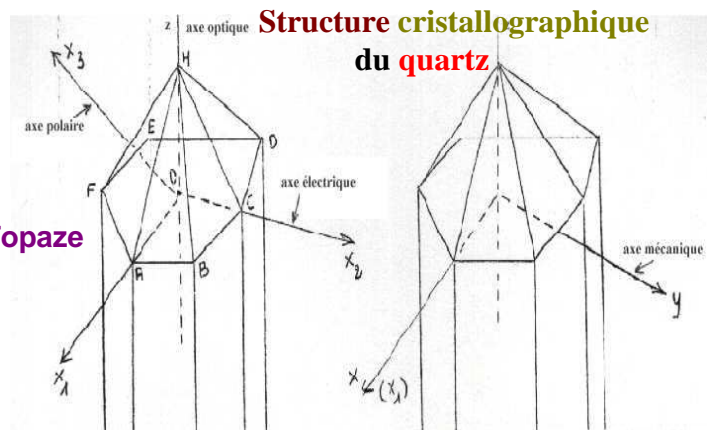
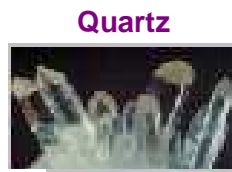
Le **quartz** est un **minéral** composé de **dioxyde** de **silicium** de **formule** SiO_2 (**silice**). Il se présente soit sous la forme de grands cristaux incolores, colorés ou fumés, soit sous la forme de cristaux microscopiques d'aspect translucide.

La **structure cristalline** est hexagonale, système rhomboédrique - trapézoèdre trigonal 3 2. Constituant 12 % (en masse) de la **lithosphère**, le quartz est le minéral le plus commun (l'oxygène et le silicium sont respectivement les premier et deuxième constituants, par ordre d'importance, de la lithosphère) ; c'est un composant important du **granite**, dont il remplit les espaces résiduels, et des roches métamorphiques granitiques (**gneiss**, **quartzite**) et



sédimentaires ([sable](#), [grès](#)). Solubilité dans l'eau : très faible à la température ordinaire. Les matériaux suivants possèdent une propriété piézoélectrique :

- le [quartz](#)
- la [topaze](#)
- la [tourmaline](#)
- la [berlinite](#) (AlPO_4)
- l'[orthophosphate de gallium](#) (GaPO_4)
- l'[arséniate de gallium](#) (GaAsO_4)



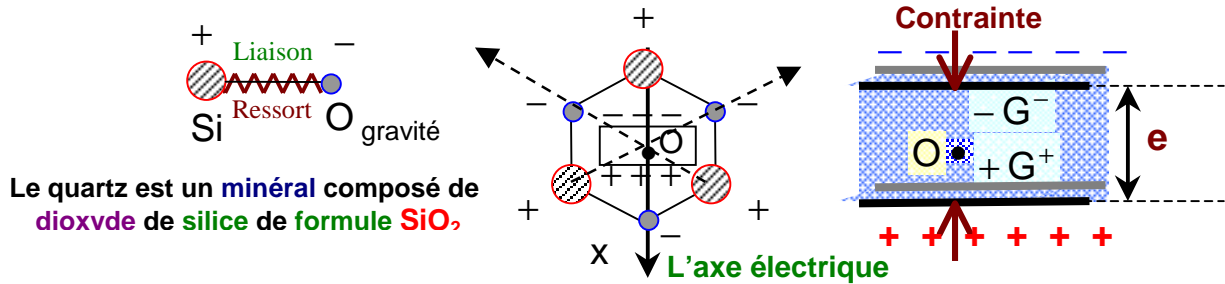
- les [céramiques](#) de structure cristalline [perovskite](#) ou de structures [tungstène-bronze](#) (BaTiO_3 , KNbO_3 , LiNbO_3 , LiTaO_3 , BiFeO_3 , Na_xWO_3 , $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$, $\text{Pb}(\text{Zr}_{0.5}\text{Ti}_{0.5})\text{O}_3$ désigné sous le nom de **céramique PZT**)
Les [céramiques](#) piézoélectriques ont un [module d'Young E](#) très élevé
- les [polymères](#) à base de fibres de [caoutchouc](#), [laine](#), [cheveux](#), [bois](#) et [soie](#)
- le [polymère polyvinylidène fluorure](#) (PVDF), $(-\text{CH}_2 - \text{CF}_2 -)_n$, a une piézoélectricité dépassant plusieurs fois celle du quartz

Cette caractéristique piézoélectrique est utilisée pour mesurer des [pressions](#) (la pression génère une contrainte mécanique sur un quartz, qui génère une charge, amplifiée par la suite). Une autre utilisation de cet effet est la création d'[horloges](#) : le quartz soumis à une charge à une certaine fréquence vibre à la [fréquence propre](#) du [cristal](#), qui est utilisée comme référence de pulsation.

L'effet inverse est utilisé pour commander certains systèmes mécaniques, comme des injecteurs à commande piézoélectrique en [automobile](#) (les premiers arrivent chez [Siemens](#) en [2004](#)). Lorsque le déplacement est de l'ordre de quelques [nanomètres](#), il permet des nano-manipulations en [nanotechnologies](#).

La piézoélectricité est aussi utilisée dans certaines des imprimantes de la marque [Epson](#), rare entreprise à fabriquer des têtes [jet d'encre](#) piézo-électriques. Des impulsions électriques font se contracter de fines buses, emplies d'encre, qui expulsent alors de minuscules gouttes d'encre. Enfin, une utilisation tout à fait courante et anodine de la piézoélectricité est celle qui en est faite dans les [allume-gaz](#) : la pression exercée sur le manche de l'appareil produit un courant électrique qui se manifeste sous la forme d'étincelles.

➔ **Effet direct** : dans le cas du quartz, par exemple, de forme $(\text{SiO}_2)_n$, nous schématiserons le problème en considérant des molécules SiO_g où O_g est le centre de gravité des 2 atomes d'oxygène. Supposons les atomes disposés régulièrement aux sommets d'un hexagone. Le cristal a un axe de symétrie Oz d'ordre 3 : l'axe optique, et 3 axes d'ordre 2 (par exemple Ox) : les 3 axes électriques [voir figure]. Les centres de gravité des charges positives et négatives sont confondus au point O :



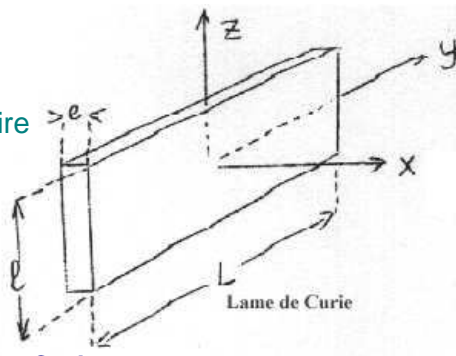
Effet piézoélectrique direct – lois de Curie (1881 Jean et Pierre Curie)

Soit une lame rectangulaire définie comme sur la figure. Soit e l'épaisseur de la lame parallèle à l'axe électrique Ox , L selon Oy axe mécanique et l selon Oz axe optique.

Par exemple, un quartz de 1 cm^3 soumis à une force de 2 kN peut produire environ $12\,500 \text{ V}$.



Pierre Curie



Les frères Curie et leurs parents

1ère loi : Si l'on applique F_x dans le sens de l'axe électrique, il apparaît des quantités d'électricité sur les faces perpendiculaires à Ox . La charge Q sur la face $x > 0$ est donnée par $Q_x = K F_x$ [$\sigma = KP$], où K est une constante dépendant de la matière utilisée, mais indépendante des dimensions de la plaque.

2ème loi : Si l'on applique une force F_y dans la direction de l'axe mécanique, des charges apparaissent à nouveau sur les faces perpendiculaires à Ox , mais de signe opposé à celles du cas précédent. $Q'_x = - K F_y L/e$. La constante K est appelée module piézoélectrique.

3ème loi : Les efforts mécaniques dans la direction de l'axe optique ne donnent lieu à aucun effet piézoélectrique.

Une tranche élémentaire de section s comprise entre les abscisses x et $x+dx$ subit un déplacement compris entre e et $e + \frac{\partial e}{\partial x} dx$

D'après la définition du module d'Young E , cette tranche est soumise à une force élémentaire : $dF = d\left(Es \frac{\partial e}{\partial x}\right) = Es \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} dx$; $[E] = \text{constante}$

$$E = \left(\frac{\text{variation de la tension par unité de section}}{\text{variation relative de la longueur du ressort qui la provoquée}} \right)_T$$

$$= \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F/s}{\Delta L/L} \right)_T = \frac{L}{s} \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)_T \Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)_T = \frac{L}{s \cdot E} \Rightarrow$$

$$dL = L\alpha dT + \frac{L}{sE} dF \Rightarrow dF = Es \frac{dL}{L} - (\alpha s E) dT ; \alpha \sim 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Notons que si le **coefficient de dilatation linéaire** α est nul on retrouve la loi de **Hookes** pour des faibles élongations du ressort.

La masse de la tranche élémentaire est $\rho s ds$. Le mouvement obéit ainsi à

l'équation : $Es \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} dx = \rho s dx \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$ d'où $\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}$ équation d'onde

Toute fonction de x plus ou moins ct est solution de l'équation, en posant $v^2 = E/\rho$ où v est la **célérité** de l'onde. Dans le cas de mouvements sinusoïdaux, de période T , la périodicité dans l'espace est la longueur d'onde $\lambda = v T$.

L'expression du déplacement par superposition d'ondes se propageant dans les deux sens avec réflexions sur les faces (**ondes stationnaires**) est :

$$e = 2A \cos \omega t \cdot \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$$

La **résonance** d'une lame est obtenue quand son

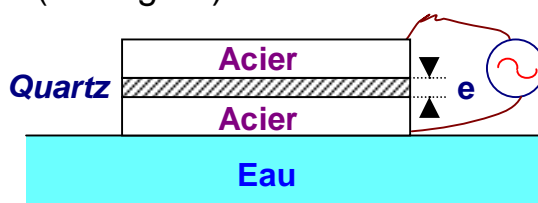
épaisseur e est un nombre entier de demi-longueurs d'onde, les faces terminales correspondant à des ventres de déplacement.

Pour le mode fondamental de vibration en demi-onde d'une lame de quartz à taille de Curie, la relation numérique est $v \cong 2850/e$ (avec v en Hz et e en m). le cristal n'est pas polarisé, et une augmentation de température qui conserve la symétrie du cristal ne le polarise pas, il n'est pas pyroélectrique (la pyroélectricité est l'apparition de charges de signes contraires sur les faces opposées d'une lame cristalline anisotrope, comme la tourmaline, par variation de température). Comprimons le cristal : suivant Ox : la maille se déforme, le centre de gravité des charges positives, passe au – dessous de O , celui des charges négatives au – dessus, une polarisation apparaît, des charges opposées se forment sur les faces du cristal perpendiculairement à l'axe électrique avec une **densité** σ : $\sigma = K \cdot P$ où

$$K = 2 \cdot 10^{-16} \text{ Cb/Pascal}$$
 pour le quartz.

➔ Effet inverse :

On vient de voir qu'une compression fait apparaître une différence de potentiel entre les faces métallisées perpendiculaires à un axe électrique du quartz. C'est la découverte de **Pierre** et **Jacques Curie** en 1888, manifestation la plus frappante de l'existence des moments dipolaires. Peu de temps après **Lippmann** prévoit thermodynamiquement l'**effet inverse** : une différence de potentiel appliquée entre les faces (métallisées) perpendiculaires à l'axe électrique, comprime ou dilate le cristal (voir figure) :



TECHNOLOGIE DES COUCHES MINCES

L'épaisseur e en fonction de la masse déposée m selon la relation $e = m/S\rho$ où S et ρ sont respectivement la surface et la masse volumique de la couche mince étudiée.

Tout de suite apparaît la possibilité de faire vibrer un quartz en appliquant une ddp alternative, et d'avoir donc un émetteur d'ultrason si la fréquence est assez grande. L'effet inverse permet au contraire d'avoir des récepteurs sonores, ou des « pick – up » susceptible d'analyser les sillons gravé sur un disque en le transcrivant en signal électrique appliqué, après amplification par un haut parleur.

Sondage par ultrason : on peut utiliser comme émetteur une lame de quartz piézo-électrique d'épaisseur e .

On donne la vitesse du son dans la quartz est $v = 3500 \text{ m/s}$. Soit λ la longueur d'onde acoustique émise dans le quartz. Il y a **résonance** si $e = \text{épaisseur de la lame} = \lambda/2$ (mode fondamental), soit :

$$e = \frac{\lambda}{2} = \frac{vT}{2} = \frac{v}{2v} \quad \text{d'où} \quad v = \frac{v}{2e}$$

⇒ La longueur d'onde λ_o de l'onde électromagnétique d'excitation est :

$$\lambda_o = c \cdot T = \frac{c}{v/2e} = \frac{2c}{v} \cdot e \quad \text{dans l'air}$$

⇒ La longueur d'onde acoustique émise dans l'eau est :

$$\lambda_{\text{eau}} = v_{\text{eau}} \cdot T = v_{\text{eau}} \cdot \frac{1}{v} \quad \text{avec } v_{\text{eau}} \approx 1500 \text{ m/s}$$

Une condition nécessaire mais non suffisante de la piézoélectricité est qu'il n'y a pas de ce centre de symétrie. En plus la piézoélectricité n'est importante que dans quelques cas :

① - quartz (SiO_2)ⁿ n'est pas utilisé en pratique en capteur piézoélectrique de force ou de pression. On lui préfère certains matériaux **céramiques ferroélectriques** tels le titanate de baryum (BaTiO_3), le titanate zirconate de plomb (**PZT**) le titanate zirconate de lanthane et de plomb (**PLZT**) qui génèrent des ddp plus importantes.

② - $\text{PO}_4\text{H}_2\text{NH}_4$ (phosphate d'ammonium diacide)

③ - sel de seignette (Rochette Salt): $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, LiSO_4

④ - tourmaline : $\text{NaTi}_9(\text{OH,F})_4(\text{BO}_3)\text{Si}_6\text{O}_{18}$

La piézoélectricité est faible pour Zn S (wurtzite ou sphalérite).

De même certains **polymères** ou des composites tel le fluorure de polyvinylidène (**PVDF**). Les polymères ont des propriétés piézo moins que les céramiques mais ils présentent l'avantage de pouvoir être réalisés en films de grande surface donc utilisable en conversion de l'énergie de la **houle** en **énergie électrique**.

N.B : Les **céramiques** piézoélectriques ont un **module d'Young** très élevé [$v^2 = E/\rho$ où v est la **célérité** de l'onde élastique dans le **matériau**], ainsi pour obtenir un signale important il faut leur appliquer des contraintes importantes.

La matrice (\vec{d}) des coefficients piézoélectriques d'un cristal qui possède un axe ternaire porté par l'axe x_3 ($x_3 = z$) des coordonnées :

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & d_{15} & -2d_{22} \\ d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & -d_{14} & -d_{11} \\ d_{13} & d_{13} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour le **quartz**, les valeurs numériques des d_{ij} calculées par **Cady** sont :

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -2,3 & 2,3 & 0 & -0,67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,67 & 4,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-12} \text{ MKSA} \leftrightarrow [d_{ij}] = \text{Cb/N}$$

Comment effectuer le calcul pour une matrice non carrée ?

Rappel : à ce sujet voir mon cours d'analyse tensorielle cartésien

$$\left. \begin{array}{l} \vec{d} = d_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \\ \vec{F} = F_k \vec{e}_k \end{array} \right\} \rightarrow \vec{Q} = Q_i \vec{e}_i = \vec{d} \cdot \vec{F} = d_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \cdot F_k \vec{e}_k = F_k d_{ij} \delta_{jk} \vec{e}_i = F_j d_{ij} \vec{e}_i \Rightarrow$$

$$\vec{Q} = d_{ij} F_j \vec{e}_i = d_{1j} F_j \vec{e}_1 + d_{2j} F_j \vec{e}_2 + d_{3j} F_j \vec{e}_3$$

$$Q_i \vec{e}_i = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} F_1 + d_{12} F_2 + d_{13} F_3 \\ d_{21} F_1 + d_{22} F_2 + d_{23} F_3 \\ d_{31} F_1 + d_{32} F_2 + d_{33} F_3 \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{array}{l} Q_1 = d_{11} F_1 + d_{12} F_2 + d_{13} F_3 \\ Q_2 = d_{21} F_1 + d_{22} F_2 + d_{23} F_3 \\ Q_3 = d_{31} F_1 + d_{32} F_2 + d_{33} F_3 \end{array}$$

il en résulte pour le quartz que :

$$Q_1 = -2,3 F_1 + 2,3 F_2 + 0 F_3 = 2,3 (F_2 - F_1) 10^{-12}$$

$$Q_2 = 0 F_1 + 0 F_2 + 0 F_3 = 0$$

$$Q_3 = 0 F_1 + 0 F_2 + 0 F_3 = 0$$




d'où si on applique une force selon l'axe électrique Ox :

$$\sigma = \frac{Q}{s} = \frac{2,3 F_1 10^{-12}}{s} = 2,3 \cdot 10^{-12} P = K P$$

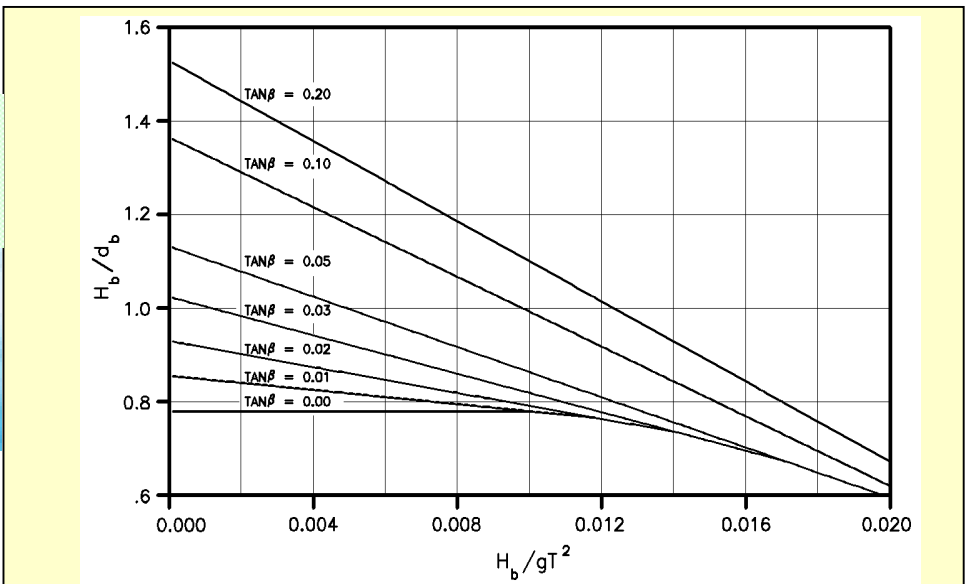
or on a vu en comprimant le cristal de quartz suivant Ox : la maille se déforme, le centre de gravité des charges positives, passe au – dessous de O, celui des charges négatives au – dessus, une polarisation apparaît, des charges opposées se forment sur les faces du cristal perpendiculairement à l'axe électrique avec une **densité** de charge électrique σ donnée par :

$$\sigma = K \cdot P \text{ où } K = 2 \cdot 10^{-16} \text{ Cb/Pascal pour le quartz.}$$

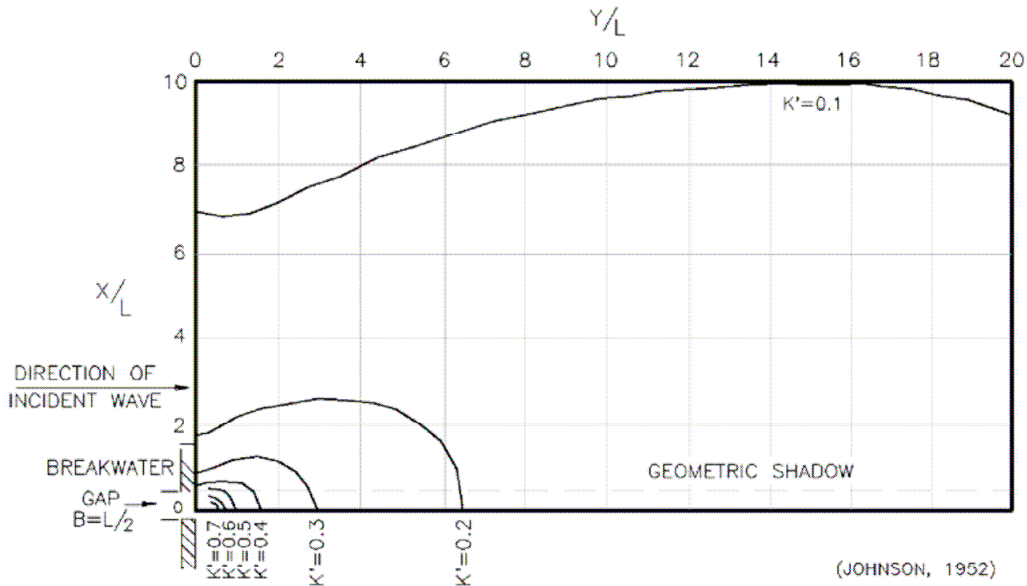
➔ **Vue sur les différents types de déferlements :**

 <p>$\xi_o < 0.5$</p>	<p>Glissant: --> pente faible --> rectiligne --> $K > 0.068$</p>	$K \equiv \frac{H_b \cdot (\text{tg}\beta)^{-1}}{gT^2}$
 <p>$0.5 < \xi_o < 3.3$</p>	<p>Plongeant: --> pente moyenne --> oblique --> $0.003 < K < 0.068$ --> $0.5 < \text{Iribarren} < 3.3$</p>	<p>ξ_o paramètre de similarité de Battjes</p>
 <p>$\xi_o > 3.3$</p>	<p>gonflant: --> pente forte --> oblique --> $K < 0.003$</p>	$\xi_o \equiv \text{tg}\beta \cdot \left(\frac{H_o}{L_o} \right)^{-\frac{1}{2}}$

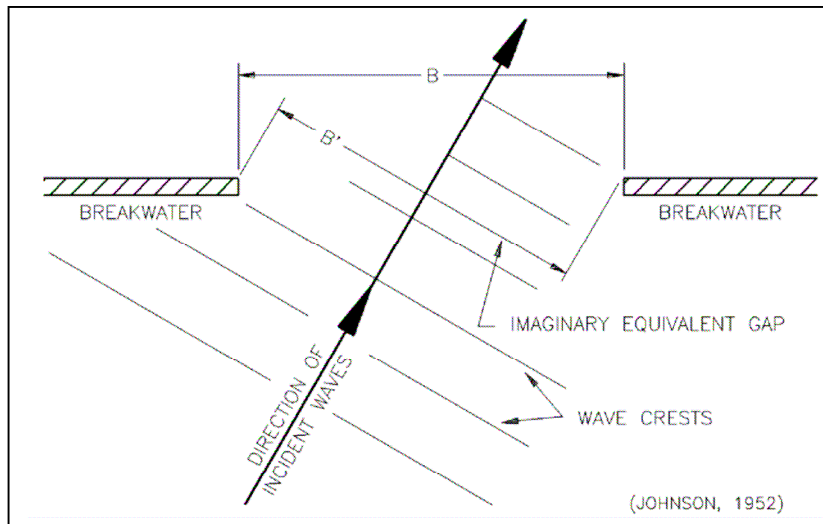
Surging/collapsing si $\xi_o > 3.3$; Plunging si $0.5 < \xi_o < 3.3$ & Spilling si $\xi_o < 0.5$



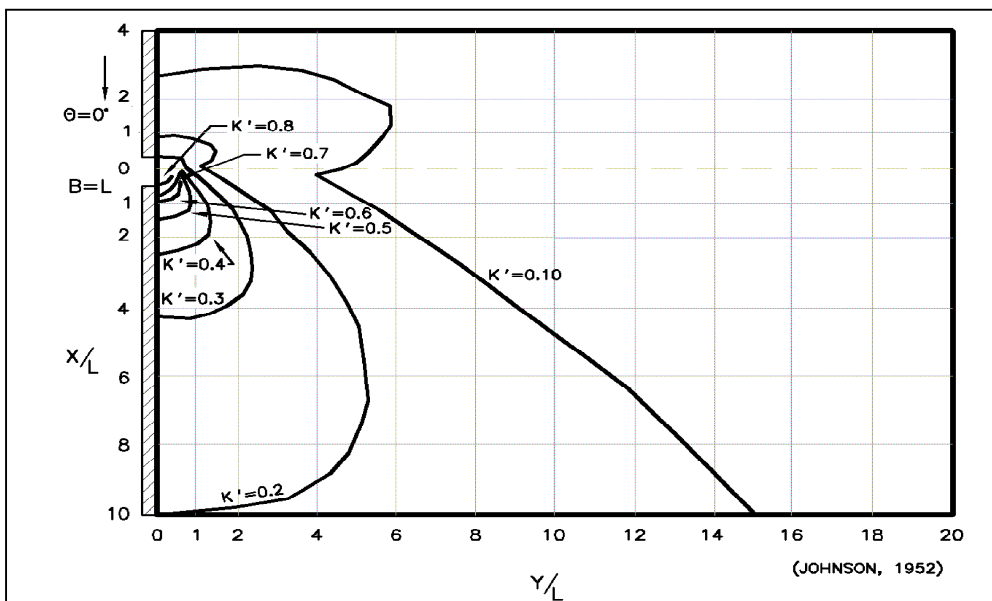
Profondeur de déferlement d_b fonction de $H_b / (gT^2)$ selon Weggel



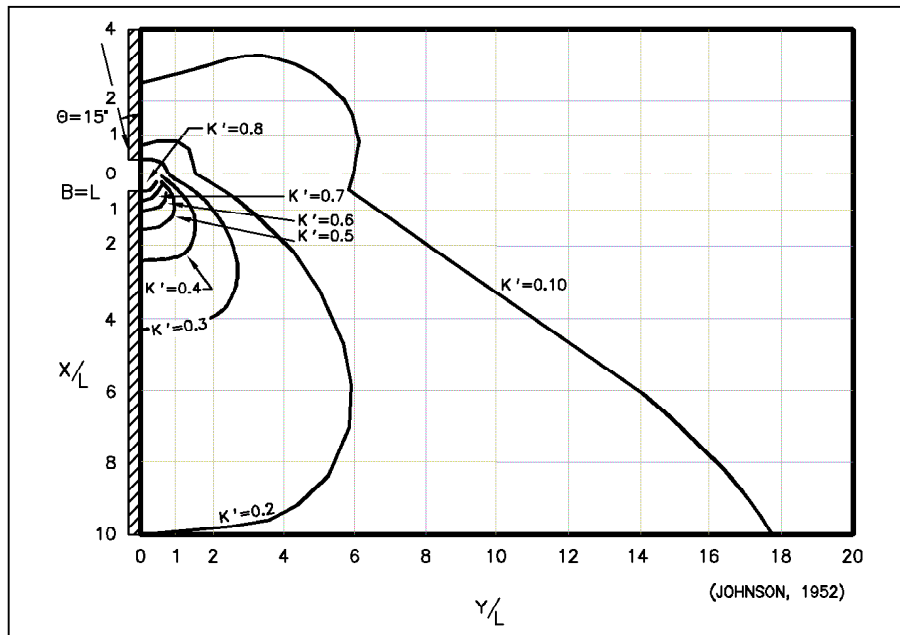
Contours of equal diffraction coefficient, gap width = 0.5 wavelength ($B/L = 0.5$)



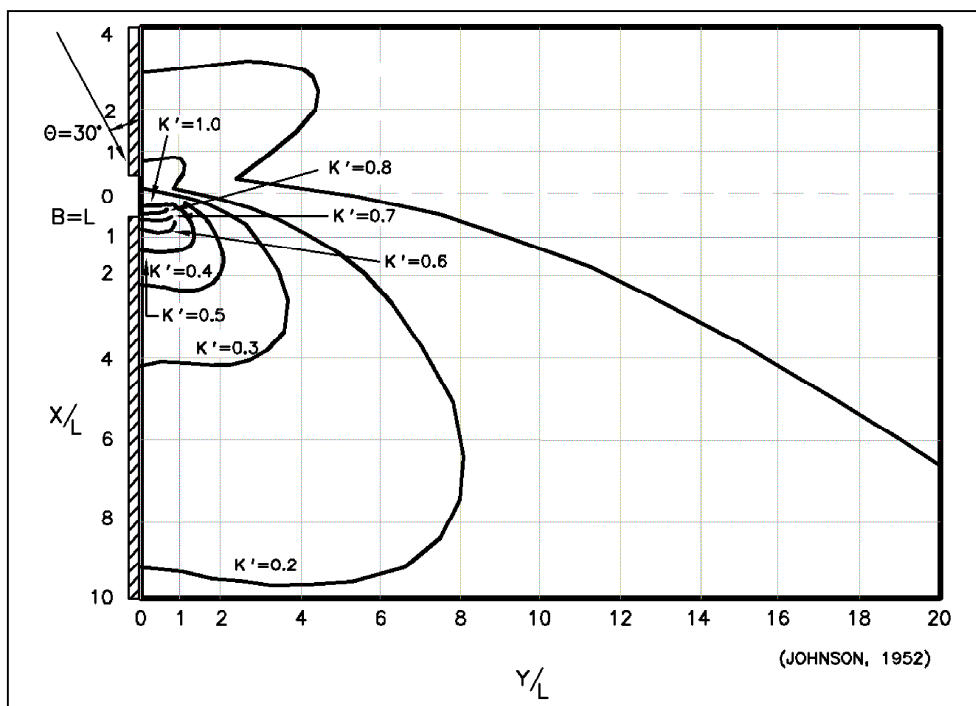
Wave incidence oblique to breakwater gap



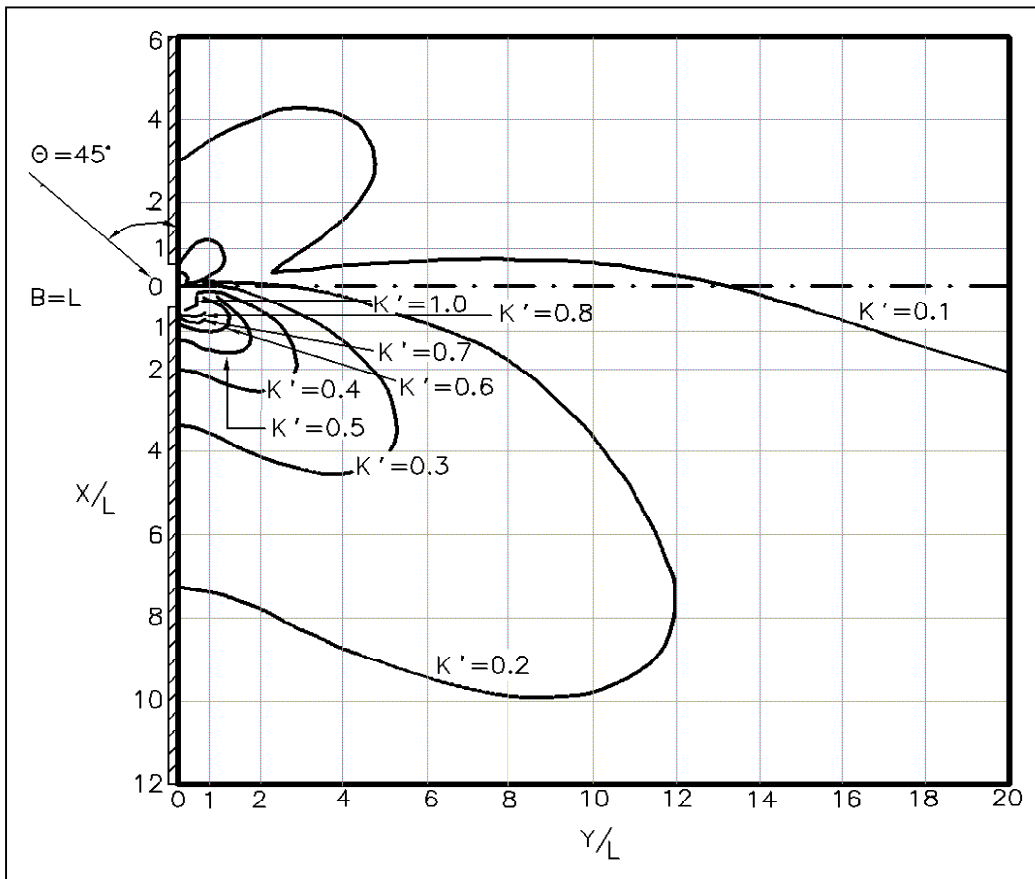
Diffraction for a breakwater gap of one wavelength width where $\theta = 0^\circ$



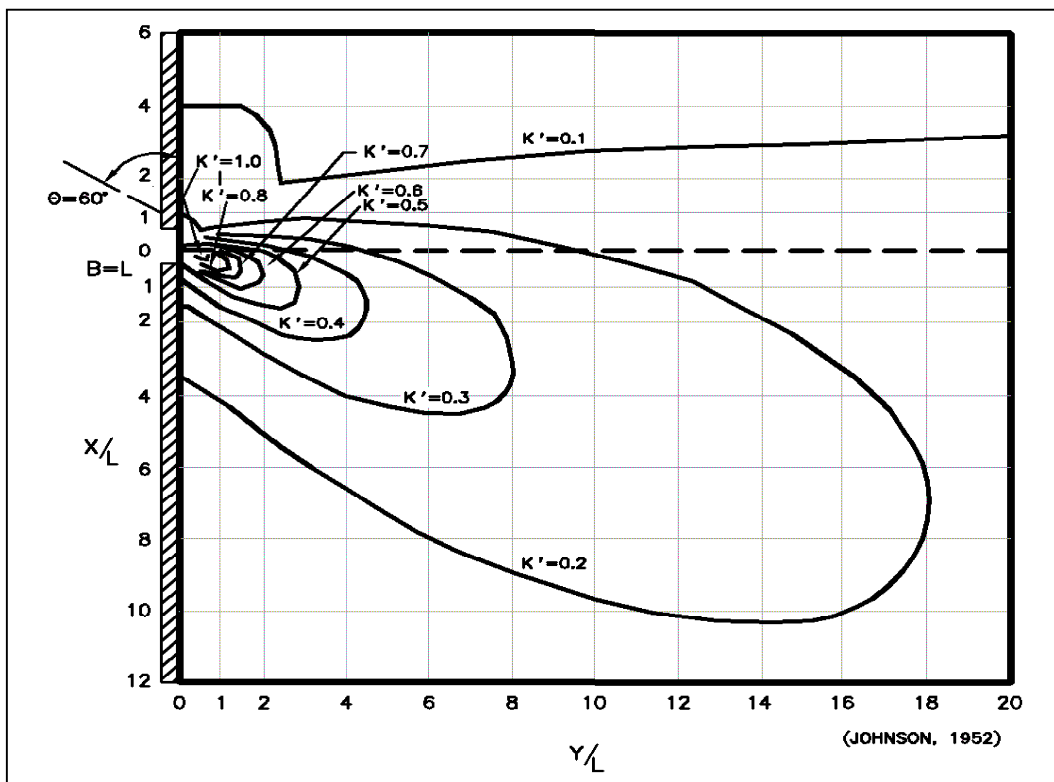
Diffraction for a breakwater gap of one wavelength width where $\theta = 15^\circ$



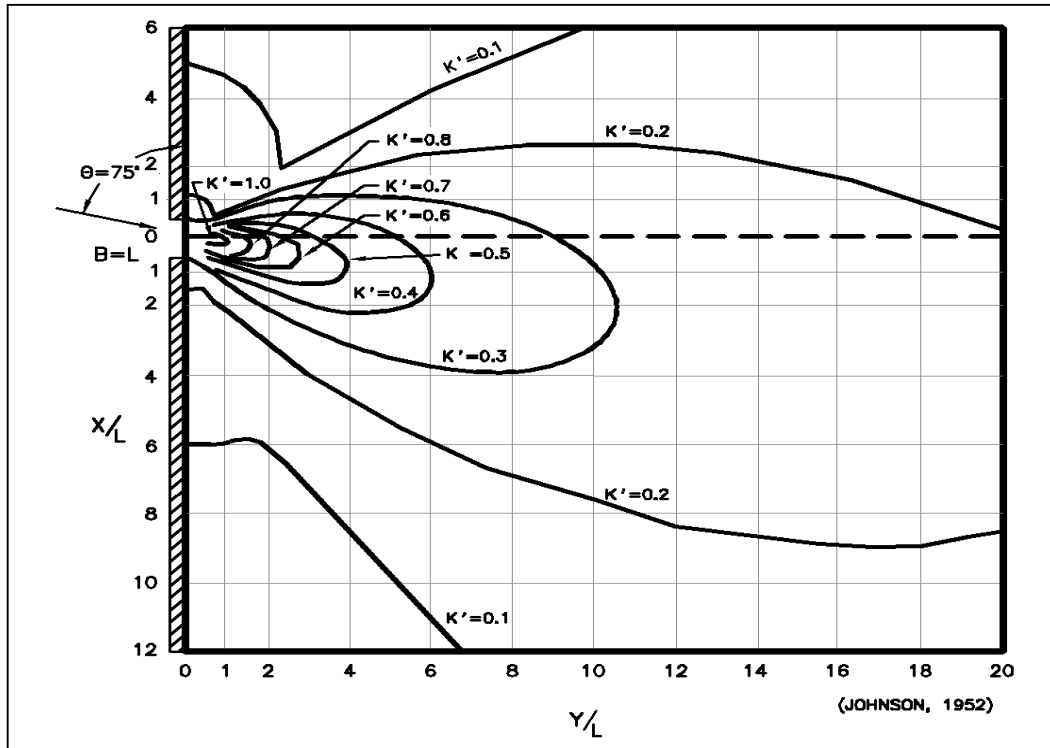
Diffraction for a breakwater gap of one wavelength width where $\theta = 30^\circ$



Diffraction for a breakwater gap of one wavelength width where $\theta = 45^\circ$



Diffraction for a breakwater gap of one wavelength width where $\theta = 60^\circ$

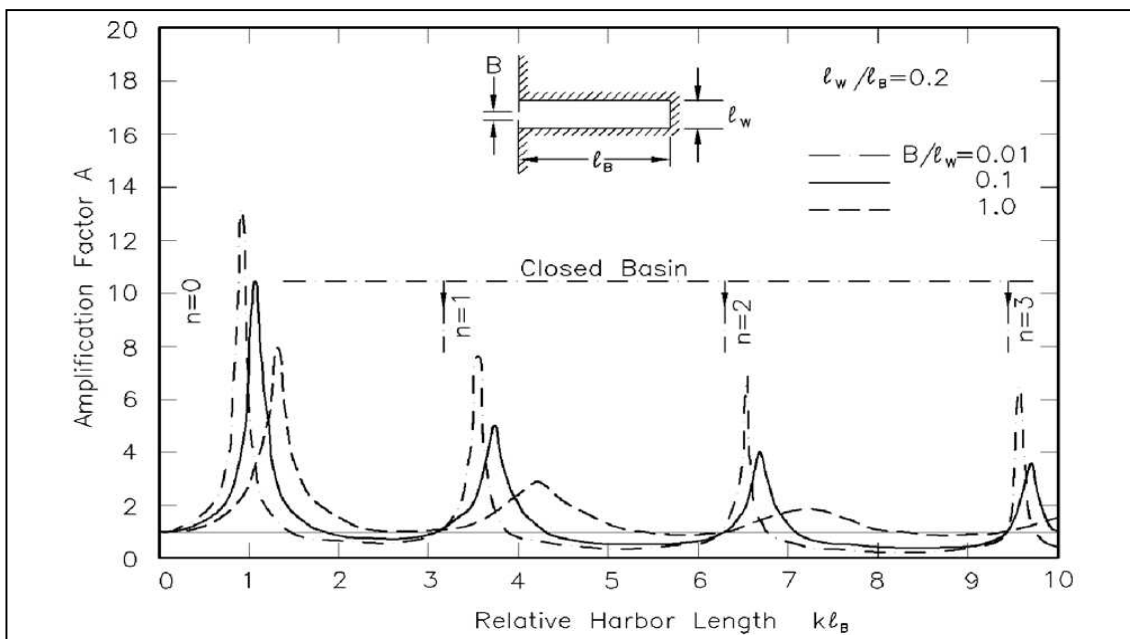


Diffraction for a breakwater gap of one wavelength width where $\theta = 75^\circ$

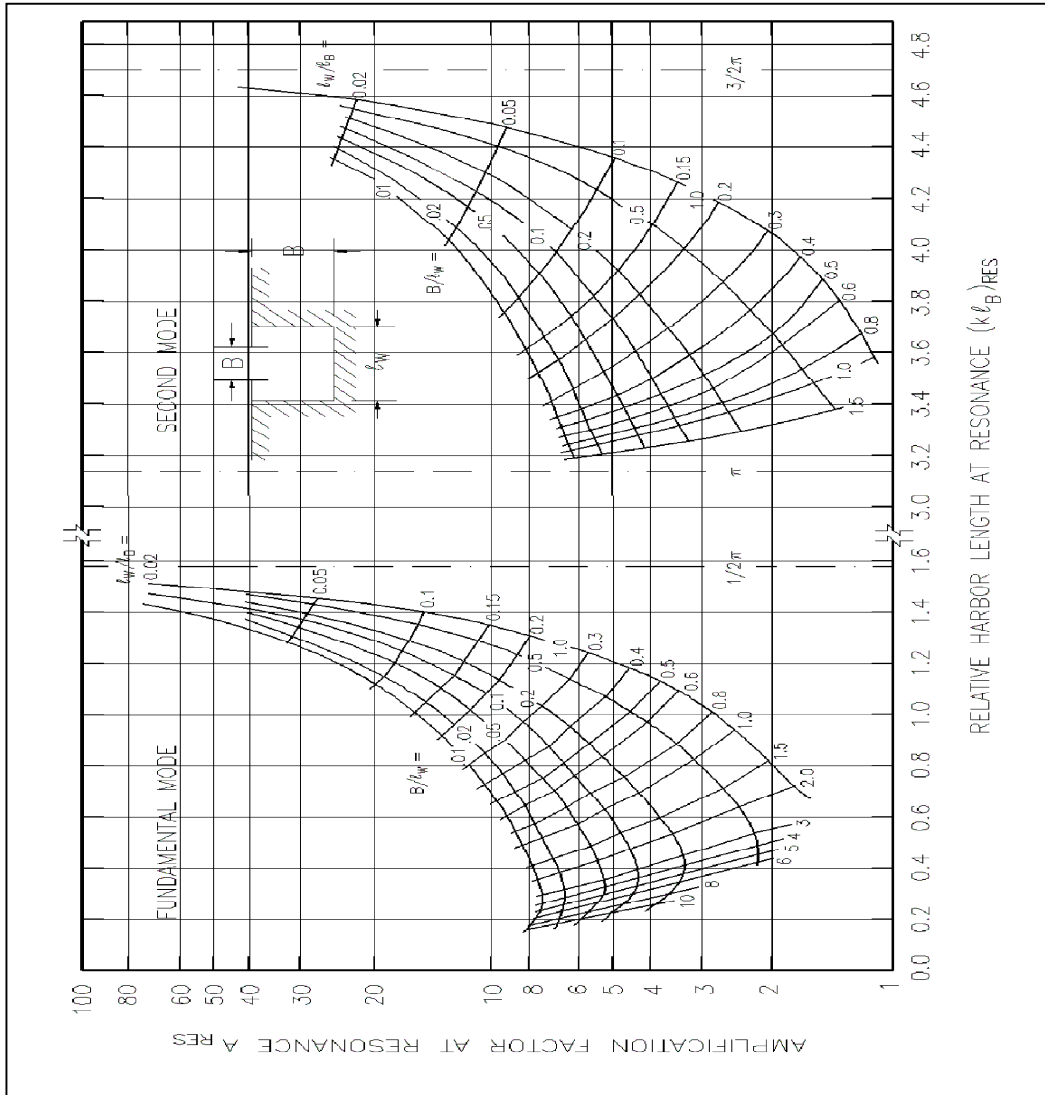
• **Remarque importante :**

Ces diagrammes de diffraction sont donnés pour une profondeur d'eau constante « modélisés par l'équation différentielle Helmholtz », mais si la profondeur varie dans le port on a une réfraction et une diffraction combinée qui se produisent simultanément dans le havre. Pour une modélisation mathématique de la réfraction – diffraction on recourt dans ce cas à l'équation différentielle de Berkhoff.

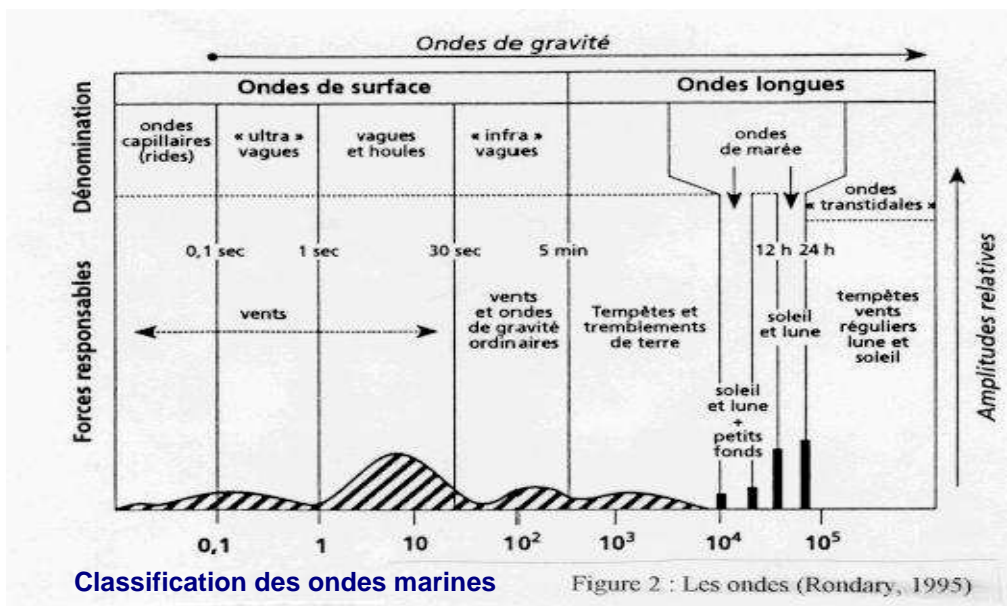
Complément sur la résonance portuaire



Theoretical response of symmetrical, narrow, rectangular harbor (after Ippen and Goda (1963))



Resonant length and amplification factor of symmetrical rectangular harbor (from Raichlen and Lee (1992) ; after Ippen and Goda (1963))



Classification des ondes marines

Figure 2 : Les ondes (Rondary, 1995)

Complément :

Pour évaluer l'effet de la diffraction d'un spectre directionnel **Goda, Takayama & Suzuki (1978)** ont calculé le coefficient de diffraction par une jetée semi – infinie ou par une passe (breakwater gap) en morcelant le spectre en un certain nombre de composantes en fréquences (10) et en direction (de 20 à 36) et ont combiné le résultat de diffraction dans la zone abritée de la brise – lame ou du gap , cette procédure conduit à un coefficient de diffraction (K'_e) donné par :

$$K'_e = \sqrt{\frac{1}{m_o} \int_0^\infty \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} S(f, \theta) (K_D)^2 df d\theta} \quad \text{où}$$

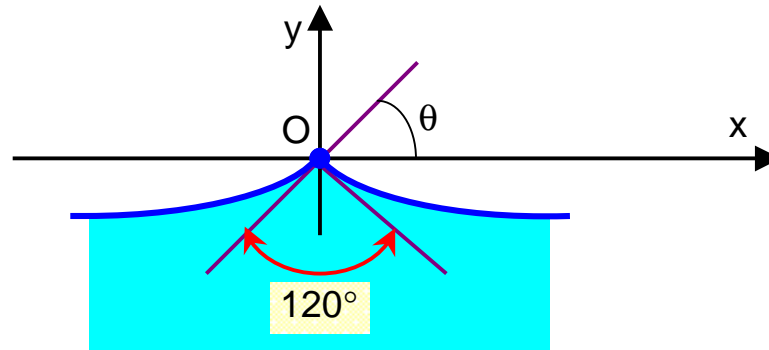
- K_D = le coefficient de diffraction de chaque composant de fréquence (f) et de direction (θ) agissant comme une onde de gravité monochromatique .
- m_o = le moment d'ordre zéro du spectre = $\int_0^\infty \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} S(f, \theta) df d\theta$.
- df & $d\theta$ = intervalle de fréquence et de direction de chaque composante du spectre .
- θ_{max} et θ_{min} = les limites directionnelles du spectre.
- $S(f, \theta)$ = la densité spectrale d'énergie de chaque composante (par exemple le spectre **JONSWAP** : voir **Ch05 HM**).

Harbor Geometry	First Resonant Mode		Second Resonant Mode	
	$k l_B$	A_{RES}	$k l_B$	A_{RES}
	1.089	16.43	2.565	11.45
	1.229	10.96	3.177	7.61
	1.315	7.81	4.182	2.68
	1.696	8.12	4.559	4.32
	1.757	21.85	3.280	32.18
	2.050	8.50	4.926	6.19

Réponses résonantes des ports idéalisés de différentes géométrie d'après Zelt 1986

Déferlement en eau profonde de la houle de Stokes

Ce paragraphe était représenté au Ch01 page N°32 de mon cours d'Hydraulique Maritime. En houle de Stokes la forme limite correspond à un point anguleux de 120° au sommet :



En effet par rapport à un système d'axe (xOy) animé d'une vitesse de translation égale à la célérité, la particule fluide au sommet O a une vitesse nulle. Mais à la surface libre, le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{v^2}{2g} + y = 0$$

Comme en O : ('y = 0 & v = 0) Bernoulli donne alors :

$$v \propto \sqrt{y}$$

En coordonnées polaires le potentiel de vitesse est :

$$\Phi = \sum A_n r^n \sin n\theta : \begin{cases} v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \end{cases} \text{ avec } (v^2 = v_r^2 + v_\theta^2)$$

Pour que $(\frac{\partial \Phi}{\partial r})$ soit de la forme $(A\sqrt{r})$ il faut que :

$$\Phi = A r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{3\theta}{2}$$

et pour que $(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0)$ le long des tangents au sommet "O" du profil :

$$\cos \frac{3\theta}{2} = 0 \Rightarrow \theta = \pm 60^\circ \quad \text{cqfd}$$

La cambrure limite (déferlement) est selon **Michell 1893 & Miche 1944**:

$$\gamma_L = 14\% \quad \text{cambrure limite en eau profonde}$$